College Mathematics Guidance Series
大学数学学习辅导丛书

高等数学
习题全解指南
上册
同济·第七版

同济大学数学系 编

高等教育出版社

College Mathematics Guidance Series
大学数学学习辅导丛书

高等数学
习题全解指南

上册

同济·第七版

同济大学数学系 编

GAODENG SHUXUE XITI QUANJIE ZHINAN

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是与同济大学数学系编写的《高等数学》（第七版）相配套的学习辅导书，由同济大学数学系的教师编写。本书内容由三部分组成，第一部分是按《高等数学》（第七版）（上册）的章节顺序编排，给出习题全解，部分题目在解答之后对该类题的解法作了小结、归纳，有的提供了多种解法；第二部分是全国硕士研究生入学统一考试数学试题选解，所选择的试题以工学类为主，少量涉及经济学类试题；第三部分是同济大学高等数学试卷选编以及考题的参考解答。

本书对教材具有相对的独立性，可为学习高等数学的工科和其他非数学类专业学生以及复习高等数学准备报考硕士研究生的人员提供解题指导，也可供讲授高等数学的教师在备课和批改作业时参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学习题全解指南：同济第7版．上册/同济大学数学系编．--北京：高等教育出版社，2014.7（2015.4重印）

ISBN 978-7-04-039691-1

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①同…　Ⅲ．①高等数学-高等学校-题解　Ⅳ．①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第095897号

策划编辑	王　强	责任编辑	于丽娜	特约编辑	张让让	封面设计	王凌波
版式设计	于　婕	插图绘制	杜晓丹	责任校对	刘丽娴	责任印制	朱学忠

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	高教社（天津）印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	25.25	版　　次	2014年7月第1版
字　　数	460千字	印　　次	2015年4月第3次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	39.20元

物 料 号　39691-00

前言

由同济大学数学系编写的《高等数学》(第七版)已作为“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材于2014年正式出版。本书是《高等数学》(第七版)的配套用书,主要是为学习高等数学的大学生以及复习高等数学准备报考硕士研究生的人员提供一本解题指导的参考书,也可供讲授高等数学的教师在备课和批改作业时参考。

本书内容由三部分组成,第一部分是《高等数学》(第七版)的习题全解,包括各章的习题与总习题及解答。在解答中,有的题在解答之后,以注释的形式对该类题的解法作了归纳小结,有的题提供了常用的具有典型意义的多种解法。第二部分是全国硕士研究生入学统一考试数学试题选解,包括函数、极限、连续,一元函数微分学,一元函数积分学,微分方程,空间解析几何与向量代数,多元函数微分学,多元函数积分学,无穷级数等八项内容,每项选编的题量在30题左右,其中不乏近几年入学统一考试的试题。在每道试题的前面都注明了试题的年份及类别,如(2010.Ⅰ)表示为2010年第一类考题。所选择的试题以工科类为主,少量涉及经济学类试题,每道试题都给出了解题的思路与方法,有的还给出了多种解法,以供读者参考。第三部分是同济大学高等数学试卷选编,这部分已作了全部更新,按上、下册内容,选了期中、期末各两套试卷,并提供了试题的参考解答。

本书由同济大学数学系的教师编写,其中第一部分第一、九章,第二部分(一)、(二)、(六)由邱伯驺完成;第一部分第二、三、八章由徐建平完成;第一部分第四、五、六章,第二部分(三)由朱晓平完成;第一部分第七、十二章,第二部分(四)、(八)由应明完成;第一部分第十、十一章,第二部分(五)、(七)由郭镜明完成;第三部分由朱晓平完成。

在使用本书时,建议读者在个人学习、练习的基础上,再加以参考、对照,找出自己在知识掌握方面的不足,学习分析、解题的方法和思路,学会举一反三,采取这种方式参考本书,必能从中获益。本书中存在的问题,欢迎广大专家、同仁和读者批评指正。

编　者

二〇一四年六月

目录

一、《高等数学》(第七版)上册习题全解

二、全国硕士研究生入学统一考试数学试题选解

三、同济大学高等数学试卷选编

一、《高等数学》(第七版)上册

习题全解

第一章

函数与极限

习题 1-1　映射与函数

1. 求下列函数的自然定义域：

(1) $y=\sqrt{3x+2}$；　(2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$；

(3) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；　(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$；

(5) $y=\sin\sqrt{x}$；　(6) $y=\tan(x+1)$；

(7) $y=\arcsin(x-3)$；　(8) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$；

(9) $y=\ln(x+1)$；　(10) $y=e^{\frac{1}{x}}$.

解　(1) $3x+2\geqslant 0\Rightarrow x\geqslant -\dfrac{2}{3}$，即定义域为$\left[-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$.

(2) $1-x^2\neq 0\Rightarrow x\neq \pm 1$，即定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(3) $x\neq 0$ 且 $1-x^2\geqslant 0\Rightarrow x\neq 0$ 且 $|x|\leqslant 1$，即定义域为$[-1,0)\cup(0,1]$.

(4) $4-x^2>0\Rightarrow |x|<2$，即定义域为$(-2,2)$.

(5) $x\geqslant 0$，即定义域为$[0,+\infty)$.

(6) $x+1\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即定义域为$\left\{x\ \middle|\ x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi-1,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(7) $|x-3|\leqslant 1\Rightarrow 2\leqslant x\leqslant 4$，即定义域为$[2,4]$.

(8) $3-x\geqslant 0$ 且 $x\neq 0$，即定义域为$(-\infty,0)\cup(0,3]$.

(9) $x+1>0\Rightarrow x>-1$，即定义域为$(-1,+\infty)$.

(10) $x\neq 0$，即定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

注　本题是求函数的自然定义域，一般方法是先写出构成所求函数的各个简单函数的定义域，再求出这些定义域的交集，即得所求定义域. 下列简单函数及其定义域是经常用到的：

$y=\dfrac{Q(x)}{P(x)}$，$P(x)\neq 0$；

$y=\sqrt[2n]{x}$，$x\geqslant 0$；

$y=\log_a x$，$x>0$；

$y=\tan x, x\neq\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi, k\in\mathbf{Z}$;

$y=\cot x, x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}$;

$y=\arcsin x, |x|\leqslant 1$;

$y=\arccos x, |x|\leqslant 1$.

2. 下列各题中,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同?为什么?

(1) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$;

(2) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}, g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$;

(4) $f(x)=1, g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

解 (1) 不同,因为定义域不同.

(2) 不同,因为对应法则不同,$g(x)=\sqrt{x^2}=\begin{cases} x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$

(3) 相同,因为定义域、对应法则均相同.

(4) 不同,因为定义域不同.

3. 设

$$\varphi(x)=\begin{cases} |\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3},\end{cases}$$

求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right),\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right),\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right),\varphi(-2)$,并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图形.

解
$$\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|=\frac{1}{2},\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2},\varphi(-2)=0.$$

$y=\varphi(x)$ 的图形如图 1-1 所示.

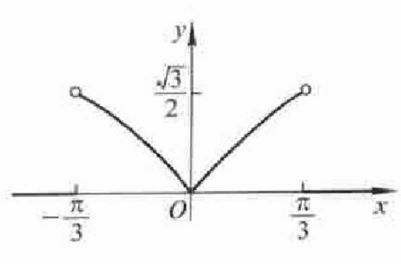


图 1-1

4. 试证下列函数在指定区间内的单调性:

(1) $y=\dfrac{x}{1-x},(-\infty,1)$;

(2) $y=x+\ln x,(0,+\infty)$.

证　(1) $y=f(x)=\dfrac{x}{1-x}=-1+\dfrac{1}{1-x},(-\infty,1)$.

设 $x_1<x_2<1$. 因为

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{1}{1-x_2}-\frac{1}{1-x_1}=\frac{x_2-x_1}{(1-x_1)(1-x_2)}>0,$$

所以 $f(x_2)>f(x_1)$，即 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 内单调增加.

(2) $y=f(x)=x+\ln x,(0,+\infty)$.

设 $0<x_1<x_2$. 因为

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2+\ln x_2-x_1-\ln x_1=x_2-x_1+\ln\frac{x_2}{x_1}>0,$$

所以 $f(x_2)>f(x_1)$，即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

5. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

证　设 $-l<x_1<x_2<0$，则 $0<-x_2<-x_1<l$，由 $f(x)$ 是奇函数，得 $f(x_2)-f(x_1)=-f(-x_2)+f(-x_1)$. 因为 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，所以 $f(-x_1)-f(-x_2)>0$，从而 $f(x_2)>f(x_1)$，即 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

6. 设下面所考虑的函数都是定义在区间 $(-l,l)$ 上的. 证明：

(1) 两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

证　(1) 设 $f_1(x),f_2(x)$ 均为偶函数，则 $f_1(-x)=f_1(x),f_2(-x)=f_2(x)$. 令 $F(x)=f_1(x)+f_2(x)$，于是

$$F(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=f_1(x)+f_2(x)=F(x),$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x),g_2(x)$ 均为奇函数，则 $g_1(-x)=-g_1(x),g_2(-x)=-g_2(x)$. 令 $G(x)=g_1(x)+g_2(x)$，于是

$$G(-x)=g_1(-x)+g_2(-x)=-g_1(x)-g_2(x)=-G(x),$$

故 $G(x)$ 为奇函数.

(2) 设 $f_1(x),f_2(x)$ 均为偶函数，则 $f_1(-x)=f_1(x),f_2(-x)=f_2(x)$. 令 $F(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$. 于是

$$F(-x)=f_1(-x)\cdot f_2(-x)=f_1(x)f_2(x)=F(x),$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x),g_2(x)$ 均为奇函数，则 $g_1(-x)=-g_1(x),g_2(-x)=-g_2(x)$. 令 $G(x)=g_1(x)\cdot g_2(x)$. 于是

$$G(-x)=g_1(-x)\cdot g_2(-x)=[-g_1(x)][-g_2(x)]$$

$$=g_1(x)\cdot g_2(x)=G(x),$$

故 $G(x)$ 为偶函数.

设 $f(x)$ 为偶函数, $g(x)$ 为奇函数, 则 $f(-x)=f(x)$, $g(-x)=-g(x)$. 令 $H(x)=f(x)\cdot g(x)$, 于是

$$H(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)[-g(x)]$$
$$=-f(x)\cdot g(x)=-H(x),$$

故 $H(x)$ 为奇函数.

7. 下列函数中哪些是偶函数,哪些是奇函数,哪些既非偶函数又非奇函数?

(1) $y=x^2(1-x^2)$;　　(2) $y=3x^2-x^3$;

(3) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;　　(4) $y=x(x-1)(x+1)$;

(5) $y=\sin x-\cos x+1$;　　(6) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$.

解 (1) $y=f(x)=x^2(1-x^2)$, 因为

$$f(-x)=(-x)^2[1-(-x)^2]=x^2(1-x^2)=f(x),$$

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(2) $y=f(x)=3x^2-x^3$, 因为

$$f(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3,$$
$$f(-x)\neq f(x),\quad \text{且}\ f(-x)\neq -f(x),$$

所以 $f(x)$ 既非偶函数又非奇函数.

(3) $y=f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, 因为

$$f(-x)=\frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\frac{1-x^2}{1+x^2}=f(x),$$

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(4) $y=f(x)=x(x-1)(x+1)$, 因为

$$f(-x)=(-x)[(-x)-1][(-x)+1]$$
$$=-x(x+1)(x-1)=-f(x),$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

(5) $y=f(x)=\sin x-\cos x+1$, 因为

$$f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1,$$
$$f(-x)\neq f(x)\ \text{且}\ f(-x)\neq -f(x),$$

所以 $f(x)$ 既非偶函数又非奇函数.

(6) $y=f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$, 因为 $f(-x)=\dfrac{a^{-x}+a^x}{2}=f(x)$, 所以 $f(x)$ 为偶函数.

8. 下列各函数中哪些是周期函数? 对于周期函数,指出其周期:

(1) $y=\cos(x-2)$;　　(2) $y=\cos 4x$;

(3) $y=1+\sin\pi x$;　　(4) $y=x\cos x$;

(5) $y=\sin^2 x$.

解　(1) 是周期函数,周期 $l=2\pi$.

(2) 是周期函数,周期 $l=\dfrac{\pi}{2}$.

(3) 是周期函数,周期 $l=2$.

(4) 不是周期函数.

(5) 是周期函数,周期 $l=\pi$.

9. 求下列函数的反函数:

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$;　(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$;

(3) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0)$;　(4) $y=2\sin 3x\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$;

(5) $y=1+\ln(x+2)$;　(6) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

分析　函数 f 存在反函数的前提条件为:$f:D\to f(D)$ 是单射. 本题中所给出的各函数易证均为单射,特别(1)、(4)、(5)、(6)中的函数均为单调函数,故都存在反函数.

解　(1) 由 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 解得 $x=y^3-1$,即反函数为 $y=x^3-1$.

(2) 由 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 解得 $x=\dfrac{1-y}{1+y}$,即反函数为 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

(3) 由 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 解得 $x=\dfrac{-dy+b}{cy-a}$,即反函数为 $y=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$.

(4) 由 $y=2\sin 3x\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$ 解得 $x=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{y}{2}$,即反函数为 $y=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}$.

(5) 由 $y=1+\ln(x+2)$ 解得 $x=e^{y-1}-2$,即反函数为 $y=e^{x-1}-2$.

(6) 由 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 解得 $x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$,即反函数为 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$.

10. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义,试证:函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

解　设 $f(x)$ 在 X 上有界,即存在 $M>0$,使得

$$|f(x)|\leqslant M,\quad x\in X,$$

故

$$-M\leqslant f(x)\leqslant M,\quad x\in X,$$

即 $f(x)$ 在 X 上有上界 M,下界 $-M$.

反之,设 $f(x)$ 在 X 上有上界 K_1,下界 K_2,即

$$K_2\leqslant f(x)\leqslant K_1,\quad x\in X.$$

取 $M=\max\{|K_1|,|K_2|\}$，则有

$$|f(x)|\leqslant M,\quad x\in X,$$

即 $f(x)$ 在 X 上有界.

11. 在下列各题中，求由所给函数构成的复合函数，并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值：

(1) $y=u^2,u=\sin x,x_1=\dfrac{\pi}{6},x_2=\dfrac{\pi}{3}$；

(2) $y=\sin u,u=2x,x_1=\dfrac{\pi}{8},x_2=\dfrac{\pi}{4}$；

(3) $y=\sqrt{u},u=1+x^2,x_1=1,x_2=2$；

(4) $y=e^u,u=x^2,x_1=0,x_2=1$；

(5) $y=u^2,u=e^x,x_1=1,x_2=-1$.

解　(1) $y=\sin^2 x,y_1=\dfrac{1}{4},y_2=\dfrac{3}{4}$.

(2) $y=\sin 2x,y_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2},y_2=1$.

(3) $y=\sqrt{1+x^2},y_1=\sqrt{2},y_2=\sqrt{5}$.

(4) $y=e^{x^2},y_1=1,y_2=e$.

(5) $y=e^{2x},y_1=e^2,y_2=e^{-2}$.

12. 设 $f(x)$ 的定义域 $D=[0,1]$，求下列各函数的定义域：

(1) $f(x^2)$；　　(2) $f(\sin x)$；

(3) $f(x+a)(a>0)$；　　(4) $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$.

解　(1) $0\leqslant x^2\leqslant 1\Rightarrow x\in[-1,1]$.

(2) $0\leqslant \sin x\leqslant 1\Rightarrow x\in[2n\pi,(2n+1)\pi],n\in\mathbf{Z}$.

(3) $0\leqslant x+a\leqslant 1\Rightarrow x\in[-a,1-a]$.

(4) $\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow$ 当 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$x\in[a,1-a]$；当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，定义域为 $\varnothing$.

13. 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\0, & |x|=1,\\-1, & |x|>1,\end{cases}\quad g(x)=e^x,$$

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$，并作出这两个函数的图形.

解
$$f[g(x)]=f(e^x)=\begin{cases}1, & x<0,\\0, & x=0,\\-1, & x>0.\end{cases}$$

$$g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e, & |x| < 1, \\ 1, & |x| = 1, \\ e^{-1}, & |x| > 1. \end{cases}$$

$f[g(x)]$与$g[f(x)]$的图形依次如图 1－2，图 1－3 所示.

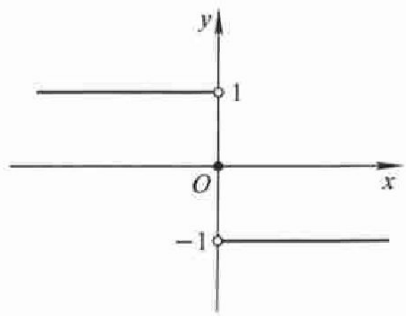


图 1－2

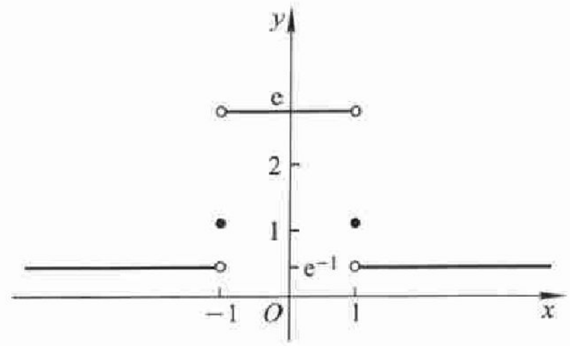


图 1－3

14. 已知水渠的横断面为等腰梯形，斜角 $\varphi = 40°$（图 1－4）. 当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时，求湿周 $L(L = AB + BC + CD)$ 与水深 h 之间的函数关系式，并指明其定义域.

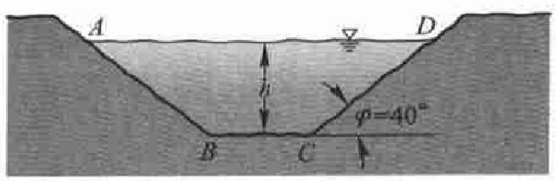


图 1－4

解　$AB = CD = \dfrac{h}{\sin 40°}$，又

$$S_0 = \frac{1}{2}h[BC + (BC + 2\cot 40° \cdot h)],$$

得

$$BC = \frac{S_0}{h} - \cot 40° \cdot h,$$

所以

$$L = \frac{S_0}{h} + \frac{2 - \cos 40°}{\sin 40°}h,$$

而 $h > 0$ 且$\dfrac{S_0}{h} - \cot 40° \cdot h > 0$，因此湿周函数的定义域为$(0,\sqrt{S_0 \tan 40°})$.

15. 设 xOy 平面上有正方形 $D = \{(x,y) | 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ 及直线 $l: x + y = t(t \geqslant 0)$. 若 $S(t)$ 表示正方形 D 位于直线 l 左下方部分的面积，试求 $S(t)$ 与 t 之间的函数关系.

解　当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，$S(t)=\dfrac{1}{2}t^2$，

当 $1<t\leqslant 2$ 时，$S(t)=1-\dfrac{1}{2}(2-t)^2=-\dfrac{1}{2}t^2+2t-1$，

当 $t>2$ 时，$S(t)=1$.

故

$$S(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}t^2, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ -\dfrac{1}{2}t^2+2t-1, & 1<t\leqslant 2,\\ 1, & t>2.\end{cases}$$

16. 求联系华氏温度(用 F 表示)和摄氏温度(用 C 表示)的转换公式，并求

(1) 90 °F 的等价摄氏温度和 -5 °C 的等价华氏温度；

(2) 是否存在一个温度值，使华氏温度计和摄氏温度计的读数是一样的？如果存在，那么该温度值是多少？

解　设 $F=mC+b$，其中 m,b 均为常数.

因为 $F=32°$ 相当于 $C=0°$，$F=212°$ 相当于 $C=100°$，所以

$$b=32,\quad m=\frac{212-32}{100}=1.8.$$

故 $F=1.8C+32$ 或 $C=\dfrac{5}{9}(F-32)$.

(1) $F=90°,\quad C=\dfrac{5}{9}(90-32)\approx 32.2°$.

$C=-5°,\quad F=1.8\times(-5)+32=23°$.

(2) 设温度值 t 符合题意，则有

$$t=1.8t+32,\quad t=-40.$$

即华氏 $-40°$ 恰好也是摄氏 $-40°$.

17. 已知 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，直角边 AC、BC 的长度分别为 20、15，动点 P 从 C 出发，沿三角形边界按 $C\to B\to A$ 方向移动；动点 Q 从 C 出发，沿三角形边界按 $C\to A\to B$ 方向移动，移动到两动点相遇时为止，且点 Q 移动的速度是点 P 移动的速度的 2 倍. 设动点 P 移动的距离为 x，$\triangle CPQ$ 的面积为 y，试求 y 与 x 之间的函数关系.

解　因为 $AC=20$，$BC=15$，所以，$AB=\sqrt{20^2+15^2}=25$.

由 $20<2\cdot 15<20+25$ 可知，点 P、Q 在斜边 AB 上相遇.

令 $x+2x=15+20+25$，得 $x=20$. 即当 $x=20$ 时，点 P、Q 相遇. 因此，所求函数的定义域为 $(0,20)$.

(1) 当 $0<x<10$ 时，点 P 在 CB 上，点 Q 在 CA 上(图 1-5).

由 $|CP| = x, |CQ| = 2x$,得

$$y = x^2.$$

(2) 当 $10 \leqslant x \leqslant 15$ 时,点 P 在 CB 上,点 Q 在 AB 上(图 1-6).

$$|CP| = x, \quad |AQ| = 2x - 20.$$

设点 Q 到 BC 的距离为 h,则

$$\frac{h}{20} = \frac{|BQ|}{25} = \frac{45 - 2x}{25},$$

得 $h = \frac{4}{5}(45 - 2x)$. 故

$$y = \frac{1}{2}xh = \frac{2}{5}x(45 - 2x) = -\frac{4}{5}x^2 + 18x.$$

(3) 当 $15 < x < 20$ 时,点 P、Q 都在 AB 上(图 1-7).

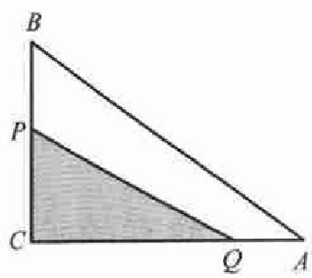


图 1-5

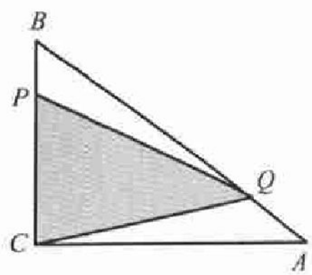


图 1-6

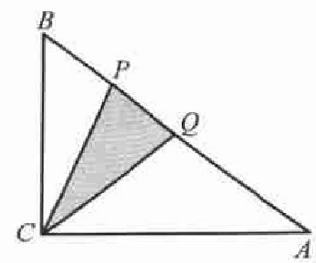


图 1-7

$$|BP| = x - 15, \quad |AQ| = 2x - 20, \quad |PQ| = 60 - 3x.$$

设点 C 到 AB 的距离为 h',则

$$h' = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12,$$

得

$$y = \frac{1}{2}|PQ| \cdot h' = -18x + 360.$$

综上可得

$$y = \begin{cases} x^2, & 0 < x < 10, \\ -\frac{4}{5}x^2 + 18x, & 10 \leqslant x \leqslant 15, \\ -18x + 360, & 15 < x < 20. \end{cases}$$

18. 利用以下美国人口普查局提供的世界人口数据①以及指数模型来推测 2020 年的世界人口.

① 这里世界人口数据是指每年年中的人口数.

年份	人口数(百万)	年增长率(%)
2008	6 708.2	1.166
2009	6 786.4	1.140
2010	6 863.8	1.121
2011	6 940.7	1.107
2012	7 017.5	1.107
2013	7 095.2	

解　由表中第 3 列,猜想 2008 年后世界人口的年增长率是 1.1%. 于是,在 2008 年后的第 t 年,世界人口将是

$$p(t) = 6\,708.2 \times (1.011)^t (\text{百万}).$$

2020 年对应 $t=12$,于是

$$p(12) = 6\,708.2 \times (1.011)^{12} \approx 7\,649.3(\text{百万}) \approx 76(\text{亿}).$$

即推测 2020 年的世界人口约为 76 亿.

习题 1-2　数列的极限

1. 下列各题中,哪些数列收敛,哪些数列发散?对收敛数列,通过观察 $\{x_n\}$ 的变化趋势,写出它们的极限:

(1) $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$;　　(2) $\left\{(-1)^n \dfrac{1}{n}\right\}$;

(3) $\left\{2+\dfrac{1}{n^2}\right\}$;　　(4) $\left\{\dfrac{n-1}{n+1}\right\}$;

(5) $\{n(-1)^n\}$;　　(6) $\left\{\dfrac{2^n-1}{3^n}\right\}$;

(7) $\left\{n-\dfrac{1}{n}\right\}$;　　(8) $\left\{[(-1)^n+1]\dfrac{n+1}{n}\right\}$.

解　(1) 收敛,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$.

(2) 收敛,$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}=0$.

(3) 收敛,$\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)=2$.

(4) 收敛,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n+1}=1$.

(5) $\{n(-1)^n\}$ 发散.

(6) 收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-1}{3^n}=0$.

(7) $\left\{n-\dfrac{1}{n}\right\}$发散.

(8) $\left\{[(-1)^n+1]\dfrac{n+1}{n}\right\}$发散.

2. (1) 数列的有界性是数列收敛的什么条件？

(2) 无界数列是否一定发散？

(3) 有界数列是否一定收敛？

解　(1) 必要条件.

(2) 一定发散.

(3) 未必一定收敛，如数列$\{(-1)^n\}$有界，但它是发散的.

3. 下列关于数列$\{x_n\}$的极限是 a 的定义，哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，试说明理由；如果是错的，试给出一个反例.

(1) 对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，不等式 $x_n-a<\varepsilon$ 成立；

(2) 对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，有无穷多项 x_n，使不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立；

(3) 对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，不等式 $|x_n-a|<c\varepsilon$ 成立，其中 c 为某个正常数；

$|x_n-a|<\varepsilon.$

(4) 对于任意给定的 $m\in\mathbf{N}_+$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，不等式 $|x_n-a|<\dfrac{1}{m}$ 成立.

解　(1) 错误. 如对数列$\left\{(-1)^n+\dfrac{1}{n}\right\}$，$a=1$. 对任给的 $\varepsilon>0$（设 $\varepsilon<1$），存在 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，$(-1)^n+\dfrac{1}{n}-1\leqslant\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，但$\left\{(-1)^n+\dfrac{1}{n}\right\}$的极限不存在.

(2) 错误. 如对数列

$$x_n=\begin{cases}n, & n=2k-1,\\ 1-\dfrac{1}{n}, & n=2k,\end{cases}\qquad k\in\mathbf{N}_+,\quad a=1.$$

对任给的 $\varepsilon>0$（设 $\varepsilon<1$），存在 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 且 n 为偶数时，$|x_n-a|=\dfrac{1}{n}<\varepsilon$ 成立，但$\{x_n\}$的极限不存在.

(3) 正确. 对任给的 $\varepsilon>0$，取$\dfrac{1}{c}\varepsilon>0$，按假设，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，不等式 $|x_n-a|<c\cdot\dfrac{1}{c}\varepsilon=\varepsilon$ 成立.

(4) 正确. 对任给的 $\varepsilon>0$,取 $m\in\mathbf{N}_+$,使 $\frac{1}{m}<\varepsilon$. 按假设,存在 $N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时,不等式 $|x_n-a|<\frac{1}{m}<\varepsilon$ 成立.

*4. 设数列 $\{x_n\}$ 的一般项 $x_n=\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}$. 问 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$? 求出 N,使当 $n>N$ 时,x_n 与其极限之差的绝对值小于正数 ε. 当 $\varepsilon=0.001$ 时,求出数 N.

解　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. 证明如下:

因为

$$|x_n-0|=\left|\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}\right|\leqslant\frac{1}{n},$$

要使 $|x_n-0|<\varepsilon$,只要 $\frac{1}{n}<\varepsilon$,即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$. 所以 $\forall\,\varepsilon>0$(不妨设 $\varepsilon<1$),取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$ 时,就有 $|x_n-0|<\varepsilon$.

当 $\varepsilon=0.001$ 时,取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]=1\ 000$. 即若 $\varepsilon=0.001$,只要 $n>1\ 000$,就有 $|x_n-0|<0.001$.

*5. 根据数列极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}=1$.

证　(1) 因为要使 $\left|\frac{1}{n^2}-0\right|=\frac{1}{n^2}<\varepsilon$,只要 $n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$,所以 $\forall\,\varepsilon>0$(不妨设 $\varepsilon<1$),取 $N=\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$,则当 $n>N$ 时,就有 $\left|\frac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$.

(2) 因为 $\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{2(2n+1)}<\frac{1}{4n}$,要使 $\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$,只要 $\frac{1}{4n}<\varepsilon$,即 $n>\frac{1}{4\varepsilon}$,所以 $\forall\,\varepsilon>0$ $\left(不妨设\ \varepsilon<\frac{1}{4}\right)$,取 $N=\left[\frac{1}{4\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$ 时,就有 $\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$.

注　本题中所采用的证明方法是:先将 $|x_n-a|$ 等价变形,然后适当放大,使 N 容易由放大后的量小于 ε 的不等式中求出. 这在按定义证明极限的问题中是经常采用的.

(3) 当 $a=0$ 时,所给数列为常数列,显然有此结论. 以下设 $a\neq0$. 因为

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\frac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}=\frac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\frac{a^2}{2n^2},$$

要使 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$，只要 $\dfrac{a^2}{2n^2}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{|a|}{\sqrt{2\varepsilon}}$. 所以 $\forall\varepsilon>0\left(\text{不妨设 }\varepsilon<\dfrac{1}{2}a^2\right)$，取 $N=\left[\dfrac{|a|}{\sqrt{2\varepsilon}}\right]$，则当 $n>N$ 时，就有 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

(4) 因为 $|0.\underbrace{999\cdots9}_{n\text{个}}-1|=\dfrac{1}{10^n}$，要使 $|0.\underbrace{999\cdots9}_{n\text{个}}-1|<\varepsilon$，只要 $\dfrac{1}{10^n}<\varepsilon$，即 $n>\lg\dfrac{1}{\varepsilon}$，所以 $\forall\varepsilon>0$（不妨设 $\varepsilon<1$），取 $N=\left[\lg\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，就有 $|0.\underbrace{999\cdots9}_{n\text{个}}-1|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n\text{个}}=1$.

***6.** 若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$. 并举例说明：如果数列 $\{|x_n|\}$ 有极限，但数列 $\{x_n\}$ 未必有极限.

证 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有 $|u_n-a|<\varepsilon$，从而有

$$||u_n|-|a||\leqslant|u_n-a|<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$.

但由 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$，并不能推得 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$. 例如，考虑数列 $\{(-1)^n\}$，虽然 $\lim\limits_{n\to\infty}|(-1)^n|=1$，但 $\{(-1)^n\}$ 没有极限.

***7.** 设数列 $\{x_n\}$ 有界，又 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

证 因数列 $\{x_n\}$ 有界，故 $\exists M>0$，使得对一切 n 有 $|x_n|\leqslant M$. $\forall\varepsilon>0$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，故对 $\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{M}>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，就有 $|y_n|<\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{M}$，从而有

$$|x_ny_n-0|=|x_n|\cdot|y_n|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}x_ny_n=0.$$

***8.** 对于数列 $\{x_n\}$，若 $x_{2k-1}\to a\ (k\to\infty)$，$x_{2k}\to a\ (k\to\infty)$，证明：$x_n\to a\ (n\to\infty)$.

证 因为 $x_{2k-1}\to a\ (k\to\infty)$，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists k_1$，当 $k>k_1$ 时，有 $|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$；又因为 $x_{2k}\to a\ (k\to\infty)$，所以对上述 $\varepsilon>0$，$\exists k_2$，当 $k>k_2$ 时，有 $|x_{2k}-a|<\varepsilon$.

记 $K=\max\{k_1,k_2\}$，取 $N=2K$，则当 $n>N$ 时，若 $n=2k-1$，则

$$k>K+\frac{1}{2}>k_1\Rightarrow|x_n-a|=|x_{2k-1}-a|<\varepsilon,$$

若 $n=2k$，则

$$k>K\geqslant k_2\Rightarrow|x_n-a|=|x_{2k}-a|<\varepsilon.$$

从而只要 $n>N$，就有 $|x_n-a|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

习题 1-3 函数的极限

1. 对图 1-8 所示的函数 $f(x)$，求下列极限，如极限不存在，说明理由.

(1) $\lim\limits_{x\to-2}f(x)$；

(2) $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to-2}f(x)=0$.

(2) $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=-1$.

(3) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在，因为 $f(0^+)\neq f(0^-)$.

2. 对图 1-9 所示的函数 $f(x)$，下列陈述中哪些是对的，哪些是错的？

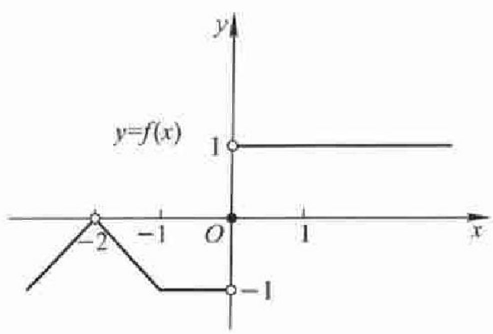


图 1-8

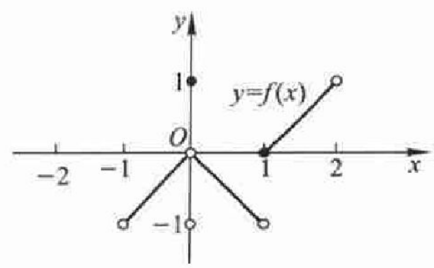


图 1-9

(1) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在；

(2) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$；

(4) $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$；

(5) $\lim\limits_{x\to1}f(x)$不存在；

(6) 对每个 $x_0\in(-1,1)$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在.

解 (1) 错，$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在与否，与 $f(0)$ 的值无关. 事实上，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$.

(2) 对，因为 $f(0^+)=f(0^-)=0$.

(3) 错，$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 的值与 $f(0)$ 的值无关.

(4) 错，$f(1^+)=0$，但 $f(1^-)=-1$，故 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 不存在.

(5) 对，因为 $f(1^-)\neq f(1^+)$.

(6) 对.

3. 对图 1-10 所示的函数，下列陈述中哪些是对的，哪些是错的？

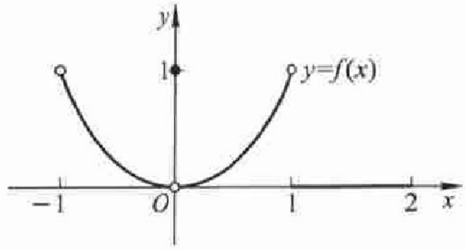


图 1－10

(1) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=1$；

(2) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$不存在；

(3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$；

(5) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1$；

(6) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=0$；

(7) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=0$；

(8) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=0$.

解　(1) 对.

(2) 对，因为当 $x<-1$ 时，$f(x)$无定义.

(3) 对，因为$f(0^+)=f(0^-)=0$.

(4) 错，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$的值与$f(0)$的值无关.

(5) 对.

(6) 对.

(7) 对.

(8) 错，因为当 $x>2$ 时，$f(x)$ 无定义，$f(2^+)$ 不存在.

4. 求$f(x)=\dfrac{x}{x}$，$\varphi(x)=\dfrac{|x|}{x}$当$x\to 0$时的左、右极限，并说明它们在$x\to 0$时的极限是否存在.

解　$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}1=1$.

因为$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$，所以$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

$$\lim_{x\to 0^+}\varphi(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0^-}\varphi(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1.$$

因为$\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}\varphi(x)$，所以$\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)$ 不存在.

***5.** 根据函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-1)=8$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 2}(5x+2)=12$；

(3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$;　　(4) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

解　(1) 因为

$$|(3x-1)-8|=|3x-9|=3|x-3|,$$

要使 $|(3x-1)-8|<\varepsilon$, 只要 $|x-3|<\dfrac{\varepsilon}{3}$,所以 $\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$,则当 $0<|x-3|<\delta$ 时,就有 $|(3x-1)-8|<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{x\to 3}(3x-1)=8$.

(2) 因为

$$|(5x+2)-12|=|5x-10|=5|x-2|,$$

要使 $|(5x+2)-12|<\varepsilon$, 只要 $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{5}$, 所以 $\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}$,则当 $0<|x-2|<\delta$ 时,就有 $|(5x+2)-12|<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{x\to 2}(5x+2)=12$.

(3) 因为 $x\to -2, x\neq -2$,

$$\left|\frac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|=|x-2-(-4)|=|x+2|=|x-(-2)|,$$

要使

$$\left|\frac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|<\varepsilon,$$

只要 $|x-(-2)|<\varepsilon$. 所以 $\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon$,则当 $0<|x-(-2)|<\delta$ 时,就有

$$\left|\frac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|<\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$.

(4) 因为 $x\to -\dfrac{1}{2}, x\neq -\dfrac{1}{2}$,

$$\left|\frac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|=|1-2x-2|=2\left|x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|,$$

要使

$$\left|\frac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|<\varepsilon,$$

只要 $\left|x-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, 所以 $\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$,则当 $0<\left|x-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right|<\delta$ 时,就有

$$\left|\frac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|<\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

*6. 根据函数极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0.$

证　(1) 因为 $\left|\dfrac{1+x^3}{2x^3}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2|x|^3}$，要使 $\left|\dfrac{1+x^3}{2x^3}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$，只要 $\dfrac{1}{2|x|^3}<\varepsilon$，即 $|x|>\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$，所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $X=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$，则当 $|x|>X$ 时，就有 $\left|\dfrac{1+x^3}{2x^3}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$.

(2) 因为 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，要使 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$，只要 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$，即 $x>\dfrac{1}{\varepsilon^2}$，所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon^2}$，则当 $x>X$ 时，就有 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

***7.** 当 $x\to2$ 时，$y=x^2\to4$. 问 δ 等于多少，使当 $|x-2|<\delta$ 时，$|y-4|<0.001$？

解　由于 $x\to2$，$|x-2|\to0$，不妨设 $|x-2|<1$，即 $1<x<3$.

要使 $|x^2-4|=|x+2||x-2|<5|x-2|<0.001$，只要

$$|x-2|<\frac{0.001}{5}=0.0002,$$

取 $\delta=0.0002$，则当 $0<|x-2|<\delta$ 时，就有 $|x^2-4|<0.001$.

注　本题证明中，先限定 $|x-2|<1$，其目的是在 $|x^2-4|=|x+2||x-2|$ 中，将 $|x+2|$ 放大为5，从而去掉因子 $|x+2|$，再令 $5|x-2|<\varepsilon$，由此可以求出 $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{5}$，从而找到 δ. 这在按定义证明极限时，也是经常采用的一种方法.

***8.** 当 $x\to\infty$ 时，$y=\dfrac{x^2-1}{x^2+3}\to1$. 问 X 等于多少，使当 $|x|>X$ 时，$|y-1|<0.01$？

解　因为 $\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+3}-1\right|=\dfrac{4}{x^2+3}<\dfrac{4}{x^2}$，要使 $\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+3}-1\right|<0.01$，只要 $\dfrac{4}{x^2}<0.01$，即 $|x|>20$，取 $X=20$，则当 $|x|>X$ 时，就有 $|y-1|<0.01$.

***9.** 证明函数 $f(x)=|x|$ 当 $x\to0$ 时极限为零.

证　因为 $||x|-0|=|x|=|x-0|$，所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-0|<\delta$ 时，就有 $||x|-0|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to0}|x|=0$.

***10.** 证明：若 $x\to+\infty$ 及 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限都存在且都等于 A，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

证　因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X_1>0$，当 $x>X_1$ 时，就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

又因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，所以对上面的 $\varepsilon>0$，$\exists X_2>0$，当 $x<-X_2$ 时，就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

取 $X=\max\{X_1,X_2\}$，则当 $|x|>X$，即 $x>X$ 或 $x<-X$ 时，就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

*11. 根据函数极限的定义证明：函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在并且相等.

证　必要性　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

特别，当 $0<x-x_0<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$；当 $0<x_0-x<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

充分性　若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$，当 $0<x-x_0<\delta_1$ 时，就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$；又 $\exists\delta_2>0$，当 $0<x_0-x<\delta_2$ 时，就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

*12. 试给出 $x\to\infty$ 时函数极限的局部有界性的定理，并加以证明.

解　局部有界性定理　如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，那么存在常数 $M>0$ 和 $X>0$，使得当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$.

证明如下：因为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，所以对 $\varepsilon=1>0$，$\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，就有 $|f(x)-A|<1$，从而

$$|f(x)|\leqslant|f(x)-A|+|A|<1+|A|,$$

取 $M=|A|+1$，即有当 $|x|>X$ 时，$|f(x)|\leqslant M$.

习题 1-4　无穷小与无穷大

1. 两个无穷小的商是否一定是无穷小？举例说明之.

解　不一定. 例如，$\alpha(x)=2x$ 与 $\beta(x)=3x$ 都是当 $x\to0$ 时的无穷小，但 $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\dfrac{2}{3}$ 却不是当 $x\to0$ 时的无穷小.

*2. 根据定义证明：

(1) $y=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ 为当 $x\to3$ 时的无穷小；

(2) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ 为当 $x\to0$ 时的无穷小.

证　(1) 因为 $\left|\dfrac{x^2-9}{x+3}\right|=|x-3|$，所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-3|<\delta$ 时，就有

$$\left|\frac{x^2-9}{x+3}\right|<\varepsilon,$$

即$\frac{x^2-9}{x+3}$为当 $x\to3$ 时的无穷小.

(2) 因为$\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|$,所以$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\varepsilon$,则当$0<|x|<\delta$时,就有

$$\left|x\sin\frac{1}{x}\right|<\varepsilon,$$

即 $x\sin\frac{1}{x}$为当 $x\to0$ 时的无穷小.

*3. 根据定义证明:函数 $y=\frac{1+2x}{x}$为当 $x\to0$ 时的无穷大. 问 x 应满足什么条件,能使$|y|>10^4$?

证　因为$\left|\frac{1+2x}{x}\right|=\left|\frac{1}{x}+2\right|\geqslant\left|\frac{1}{x}\right|-2$,要使$\left|\frac{1+2x}{x}\right|>M$,只要$\left|\frac{1}{x}\right|-2>M$,即$|x|<\frac{1}{M+2}$,所以$\forall M>0$,取$\delta=\frac{1}{M+2}$,则当$0<|x-0|<\delta$时,就有$\left|\frac{1+2x}{x}\right|>M$,即$\frac{1+2x}{x}$为当 $x\to0$ 时的无穷大.

令 $M=10^4$,取$\delta=\frac{1}{10^4+2}$,当$0<|x-0|<\frac{1}{10^4+2}$时,就能使$\left|\frac{1+2x}{x}\right|>10^4$.

注　在本题的证明中,采取先将$|f(x)|=\left|\frac{1+2x}{x}\right|$等价变形,然后适当缩小,使缩小后的量大于 M,从而求出 δ. 这种方法在按定义证明函数在某个变化过程中为无穷大时,也是经常采用的.

4. 求下列极限并说明理由:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-x^2}{1-x}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)=2.$

理由:由定理 2,$\frac{1}{x}$为当 $x\to\infty$ 时的无穷小;再由定理 1,$\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)=2.$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-x^2}{1-x}=\lim\limits_{x\to0}(1+x)=1.$

理由:由定理 1,$\lim\limits_{x\to0}(1+x)=1.$

5. 根据函数极限或无穷大定义,填写下表:

	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to x_0$	$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时，即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$.	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时，即有 $\|f(x)\|>M$.	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时，即有 $f(x)>M$.	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时，即有 $f(x)<-M$.
$x\to x_0^+$	$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<x-x_0<\delta$ 时，即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$.	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<x-x_0<\delta$ 时，即有 $\|f(x)\|>M$.	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<x-x_0<\delta$ 时，即有 $f(x)>M$.	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<x-x_0<\delta$ 时，即有 $f(x)<-M$.
$x\to x_0^-$	$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0>x-x_0>-\delta$ 时，即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$.	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0>x-x_0>-\delta$ 时，即有 $\|f(x)\|>M$.	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0>x-x_0>-\delta$ 时，即有 $f(x)>M$.	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0>x-x_0>-\delta$ 时，即有 $f(x)<-M$.
$x\to\infty$	$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，使当 $\|x\|>X$ 时，即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$.	$\forall M>0$，$\exists X>0$，使当 $\|x\|>X$ 时，即有 $\|f(x)\|>M$.	$\forall M>0$，$\exists X>0$，使当 $\|x\|>X$ 时，即有 $f(x)>M$.	$\forall M>0$，$\exists X>0$，使当 $\|x\|>X$ 时，即有 $f(x)<-M$.
$x\to+\infty$	$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，使当 $x>X$ 时，即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$.	$\forall M>0$，$\exists X>0$，使当 $x>X$ 时，即有 $\|f(x)\|>M$.	$\forall M>0$，$\exists X>0$，使当 $x>X$ 时，即有 $f(x)>M$.	$\forall M>0$，$\exists X>0$，使当 $x>X$ 时，即有 $f(x)<-M$.
$x\to-\infty$	$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，使当 $x<-X$ 时，即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$.	$\forall M>0$，$\exists X>0$，使当 $x<-X$ 时，即有 $\|f(x)\|>M$.	$\forall M>0$，$\exists X>0$，使当 $x<-X$ 时，即有 $f(x)>M$.	$\forall M>0$，$\exists X>0$，使当 $x<-X$ 时，即有 $f(x)<-M$.

6. 函数 $y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是否有界？这个函数是否为 $x\to+\infty$ 时的无穷大？为什么？

解 因为 $\forall M>0$，总有 $x_0\in(M,+\infty)$，使 $\cos x_0=1$，从而 $y=x_0\cos x_0=x_0>M$，所以 $y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界.

又因为 $\forall M>0,X>0$，总有 $x_0\in(X,+\infty)$，使 $\cos x_0=0$，从而 $y=x_0\cos x_0=0<M$，所以 $y=f(x)=x\cos x$ 不是当 $x\to+\infty$ 时的无穷大.

*7. 证明：函数 $y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1]$ 内无界，但这函数不是 $x\to0^+$ 时的无穷大.

证 先证函数 $y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1]$ 内无界.

因为 $\forall M>0$,在 $(0,1]$ 中总可找到点 x_0,使 $f(x_0)>M$. 例如,可取 $x_0=\dfrac{1}{2k\pi+\dfrac{\pi}{2}}$ $(k\in$

$\mathbf{N})$,则 $f(x_0)=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$,当 k 充分大时,可使 $f(x_0)>M$. 所以 $y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 内无界.

再证函数 $y=f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 不是 $x\to0^+$ 时的无穷大.

因为 $\forall M>0,\delta>0$,总可找到点 x_0,使 $0<x_0<\delta$,但 $f(x_0)<M$. 例如,可取 $x_0=\dfrac{1}{2k\pi}$ $(k\in\mathbf{N}_+)$,当 k 充分大时,$0<x_0<\delta$,但 $f(x_0)=2k\pi\sin 2k\pi=0<M$. 所以 $y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 不是 $x\to0^+$ 时的无穷大.

8. 求函数 $f(x)=\dfrac{4}{2-x^2}$ 的图形的渐近线.

解　因为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$,所以 $y=0$ 是函数图形的水平渐近线.

因为 $\lim\limits_{x\to-\sqrt{2}}f(x)=\infty$,$\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}f(x)=\infty$,所以 $x=-\sqrt{2}$ 及 $x=\sqrt{2}$ 都是函数图形的铅直渐近线.

习题 1－5　极限运算法则

1. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+5}{x-3}$;　(2) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^2+1}$;

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$;　(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$;

(5) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$;　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$;

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^4-3x^2+1}$;

(9) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$;　(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)$;

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$;　(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}$;

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}$;　(14) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+5}{x-3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to2}(x^2+5)}{\lim\limits_{x\to2}(x-3)}=\dfrac{9}{-1}=-9$.

(2) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^2+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}(x^2-3)}{\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}(x^2+1)}=\dfrac{0}{4}=0.$

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1}(x-1)}{\lim\limits_{x\to1}(x+1)}=\dfrac{0}{2}=0.$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^2-2x+1}{3x+2}=\dfrac{\lim\limits_{x\to0}(4x^2-2x+1)}{\lim\limits_{x\to0}(3x+2)}=\dfrac{1}{2}.$

(5) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{h(2x+h)}{h}=\lim\limits_{h\to0}(2x+h)=2x.$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}2-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=2-0+0=2.$

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}=\dfrac{1}{2}.$

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^4-3x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{1-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}\right)}=\dfrac{0}{1}=0.$

(9) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(x-4)(x-2)}{(x-4)(x-1)}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to4}(x-2)}{\lim\limits_{x\to4}(x-1)}=\dfrac{2}{3}.$

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)=1\cdot2=2.$

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{2^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}2\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$

$$=2\left(1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\right)=2.$$

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n-1)}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{2}.$

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{5}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\left(1+\dfrac{3}{n}\right)$

$$=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{5}.$$

(14) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-(x+2)}{1+x+x^2}=-\frac{\lim\limits_{x\to1}(x+2)}{\lim\limits_{x\to1}(1+x+x^2)}$$

$$=-\frac{3}{3}=-1.$$

2. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x+1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+1)$.

解　(1) 因为

$$\lim_{x\to2}\frac{(x-2)^2}{x^3+2x^2}=\frac{\lim\limits_{x\to2}(x-2)^2}{\lim\limits_{x\to2}(x^3+2x^2)}=0,$$

所以

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}=\infty.$$

(2) 因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=0,$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x+1}=\infty.$$

(3) 因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^3-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^3}}{2-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}=0,$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}(2x^3-x+1)=\infty.$$

3. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$.

解　(1) 因为 $x^2\to0\,(x\to0)$，$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant1$，所以

$$\lim_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}=0.$$

(2) 因为 $\dfrac{1}{x}\to0\,(x\to\infty)$，$|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}=0.$$

4. 设$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$均为非负数列,且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=1$,$\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\infty$. 下列陈述中哪些是对的,哪些是错的? 如果是对的,说明理由;如果是错的,试给出一个反例.

(1) $a_n<b_n, n\in \mathbf{N}_+$;　(2) $b_n<c_n, n\in \mathbf{N}_+$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n c_n$ 不存在;　(4) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$ 不存在.

解　(1) 错. 例如$a_n=\dfrac{1}{n}$,$b_n=\dfrac{n}{n+1}$,$n\in \mathbf{N}_+$,当$n=1$时,$a_1=1>\dfrac{1}{2}=b_1$,故对任意$n\in \mathbf{N}_+$,$a_n<b_n$不成立.

(2) 错. 例如$b_n=\dfrac{n}{n+1}$,$c_n=(-1)^n n$,$n\in \mathbf{N}_+$. 当n为奇数时,$b_n<c_n$不成立.

(3) 错. 例如$a_n=\dfrac{1}{n^2}$,$c_n=n$,$n\in \mathbf{N}_+$. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n c_n=0$.

(4) 对. 因为,若$\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$存在,则$\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\lim\limits_{n\to\infty}(b_n c_n)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_n}$也存在,与已知条件矛盾.

5. 下列陈述中,哪些是对的,哪些是错的? 如果是对的,说明理由;如果是错的,试给出一个反例.

(1) 如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,但$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$不存在,那么$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$不存在;

(2) 如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$都不存在,那么$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$不存在;

(3) 如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,但$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$不存在,那么$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)$不存在.

解　(1) 对. 因为,若$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$存在,则$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]-\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$也存在,与已知条件矛盾.

(2) 错. 例如$f(x)=\operatorname{sgn}x$,$g(x)=-\operatorname{sgn}x$在$x\to 0$时的极限都不存在,但$f(x)+g(x)\equiv 0$在$x\to 0$时的极限存在.

(3) 错. 例如$\lim\limits_{x\to 0} x=0$,$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在,但$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

***6.** 证明本节定理3中的(2).

定理3　(2) 如果$\lim f(x)=A$,$\lim g(x)=B$,那么

$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B.$$

证　因$\lim f(x)=A$,$\lim g(x)=B$,由上节定理1,有$f(x)=A+\alpha$,$g(x)=B+\beta$,其中α、β都是无穷小,于是

$$f(x)g(x)=(A+\alpha)(B+\beta)=AB+(A\beta+B\alpha+\alpha\beta),$$

由本节定理2推论1、2,$A\beta$、$B\alpha$、$\alpha\beta$都是无穷小,再由本节定理1,$(A\beta+B\alpha+\alpha\beta)$也是无穷小,由上节定理1,得

$$\lim f(x)g(x)=AB=\lim f(x)\cdot\lim g(x).$$

习题1－6　极限存在准则　两个重要极限

1. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\omega x}{x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 3x}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$；　(4) $\lim\limits_{x\to0}x\cot x$；

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$；　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$（$x$ 为不等于零的常数）.

解　(1) 当 $\omega\neq0$ 时，

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\omega x}{x}=\lim_{x\to0}\left(\omega\cdot\frac{\sin\omega x}{\omega x}\right)=\omega\lim_{x\to0}\frac{\sin\omega x}{\omega x}=\omega;$$

当 $\omega=0$ 时，

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\omega x}{x}=0=\omega,$$

故不论 ω 为何值，均有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\omega x}{x}=\omega$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 3x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(3\cdot\dfrac{\tan 3x}{3x}\right)=3\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 3x}{3x}=3.$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\dfrac{5x}{\sin 5x}\cdot\dfrac{2}{5}\right)=\dfrac{2}{5}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x}{\sin 5x}=\dfrac{2}{5}.$

(4) $\lim\limits_{x\to0}x\cot x=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\cdot\cos x\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\cos x=1.$

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2 x}{x\sin x}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=2.$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{x}{2^n}}\cdot x\right)=x.$

2. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$；　(2) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}$；　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{kx}$（$k$ 为正整数）.

解　(1) $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}[1+(-x)]^{\frac{1}{(-x)}(-1)}=e^{-1}.$

(2) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^2=e^2.$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^2=e^2.$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{kx}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{(-x)}\right]^{(-x)(-k)}=e^{-k}$.

*3. 根据函数极限的定义,证明极限存在的准则 I ′.

准则 I′ 如果

(1) $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x),x\in \mathring{U}(x_0,r)$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$,

那么$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,且等于 A.

证 $\forall\varepsilon>0$, 因 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$, 故 $\exists\delta_1>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时, 有 $|g(x)-A|<\varepsilon$,即

$$A-\varepsilon<g(x)<A+\varepsilon, \tag{3}$$

又因$\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$, 故对上面的 $\varepsilon>0$, $\exists\delta_2>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时, 有 $|h(x)-A|<\varepsilon$,即

$$A-\varepsilon<h(x)<A+\varepsilon. \tag{4}$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,r\}$,则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,假设(1)及关系式(3)、(4)同时成立,从而有

$$A-\varepsilon<g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)<A+\varepsilon,$$

即有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 因此$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,且等于 A.

注 对于 $x\to\infty$ 的情形,利用极限$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的定义及假设条件,可以类似地证明相应的准则 I ′.

4. 利用极限存在准则证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}=1$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$;

(3) 数列$\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\cdots$的极限存在;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[n]{1+x}=1$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$.

证 (1) 因 $1<\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}<1+\dfrac{1}{n}$,而$\lim\limits_{n\to\infty}1=1,\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1$,由夹逼准则,即得证.

(2) 因 $\dfrac{n}{n+\pi}\leqslant n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)\leqslant\dfrac{n^2}{n^2+\pi}$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+\pi}=1,\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+\pi}=1$,由夹逼准则,即得证.

(3) $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}(n\in\mathbf{N}_+),x_1=\sqrt{2}$.

先证数列$\{x_n\}$有界：

$n=1$时，$x_1=\sqrt{2}<2$；假定$n=k$时，$x_k<2$. 当$n=k+1$时，$x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+2}=2$. 故$x_n<2(n\in\mathbf{N}_+)$.

再证数列$\{x_n\}$单调增加：

因

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{2+x_n}-x_n=\frac{2+x_n-x_n^2}{\sqrt{2+x_n}+x_n}=-\frac{(x_n-2)(x_n+1)}{\sqrt{2+x_n}+x_n},$$

由$0<x_n<2$，得$x_{n+1}-x_n>0$，即$x_{n+1}>x_n(n\in\mathbf{N}_+)$.

由单调有界准则，即知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

记$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 由$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$，得$x_{n+1}^2=2+x_n$. 两端同时取极限得

$$a^2=2+a\quad\Rightarrow\quad a^2-a-2=0\Rightarrow a_1=2,a_2=-1(\text{舍去}).$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

注　本题的求解过程分成两步，第一步是证明数列$\{x_n\}$单调有界，从而保证数列的极限存在；第二步是在递推公式两端同时取极限，得出一个含有极限值a的方程，再通过解方程求得极限值a. **注意**：只有在证明数列极限存在的前提下，才能采用第二步的方法求得极限值. 否则，直接利用第二步，有时会导出错误的结果.

(4) 当$x>0$时，$1<\sqrt[n]{1+x}<1+x$；当$-1<x<0$时，$1+x<\sqrt[n]{1+x}<1$. 而$\lim\limits_{x\to0}1=1,\lim\limits_{x\to0}(1+x)=1$. 由夹逼准则，即得证.

(5) 当$x>0$时，$1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant1$. 而$\lim\limits_{x\to0^+}(1-x)=1,\lim\limits_{x\to0^+}1=1$. 由夹逼准则，即得证.

习题 1-7　无穷小的比较

1. 当$x\to0$时，$2x-x^2$与x^2-x^3相比，哪一个是高阶无穷小？

解　因为$\lim\limits_{x\to0}(2x-x^2)=0,\lim\limits_{x\to0}(x^2-x^3)=0$,

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2-x^3}{2x-x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x-x^2}{2-x}=0,$$

所以当$x\to0$时，x^2-x^3是比$2x-x^2$高阶的无穷小.

2. 当$x\to0$时，$(1-\cos x)^2$与$\sin^2x$相比，哪一个是高阶无穷小？

解　因为$\lim\limits_{x\to0}(1-\cos x)^2=0,\lim\limits_{x\to0}\sin^2x=0$,

$$\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)^2}{\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2}{x^2}=0,$$

所以当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)^2$ 是比 $\sin^2 x$ 高阶的无穷小.

3. 当 $x\to 1$ 时，无穷小 $1-x$ 和(1) $1-x^3$，(2) $\frac{1}{2}(1-x^2)$ 是否同阶，是否等价？

解 (1) $\frac{1-x}{1-x^3}=\frac{1-x}{(1-x)(1+x+x^2)}=\frac{1}{1+x+x^2}\to\frac{1}{3}(x\to 1)$，同阶，不等价.

(2) $\frac{1-x}{\frac{1}{2}(1-x^2)}=\frac{1-x}{\frac{1}{2}(1-x)(1+x)}=\frac{2}{1+x}\to 1(x\to 1)$，同阶，等价.

4. 证明：当 $x\to 0$ 时，有

(1) $\arctan x\sim x$； (2) $\sec x-1\sim\frac{x^2}{2}$.

证 (1) 令 $x=\tan t$，即 $t=\arctan x$，当 $x\to 0$ 时，$t\to 0$.

因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\tan t}=1,$$

所以

$$\arctan x\sim x\quad(x\to 0).$$

(2) 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sec x-1}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1,$$

所以

$$\sec x-1\sim\frac{x^2}{2}(x\to 0).$$

5. 利用等价无穷小的性质，求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{2x}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}$($n$、$m$ 为正整数)；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$； (4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^n}{x^m}=\begin{cases}0,n>m,\\1,n=m,\\\infty,n<m.\end{cases}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sec x-1}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}.$

注　在作等价无穷小的代换求极限时,可以对分子或分母中的一个或若干个因子作代换,但不能对分子或分母中的某个加项作代换.例如,本题中若将分子中的 $\tan x$、$\sin x$ 均换成 x,那么分子成为0,得出极限为0,这就导致错误的结果.

(4) $$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(1-\sec x)}{\frac{1}{3}x^2\cdot\frac{1}{2}\sin x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{6}x^2}=-3.$$

6. 证明无穷小的等价关系具有下列性质:

(1) $\alpha\sim\alpha$(自反性);

(2) 若 $\alpha\sim\beta$,则 $\beta\sim\alpha$(对称性);

(3) 若 $\alpha\sim\beta,\beta\sim\gamma$,则 $\alpha\sim\gamma$(传递性).

证　(1) 因为 $\lim\dfrac{\alpha}{\alpha}=1$,所以 $\alpha\sim\alpha$;

(2) 因为 $\alpha\sim\beta$,即 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$,所以 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$,即 $\beta\sim\alpha$;

(3) 因为 $\alpha\sim\beta,\beta\sim\gamma$,即 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1,\lim\dfrac{\beta}{\gamma}=1$,所以

$$\lim\frac{\alpha}{\gamma}=\lim\left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\gamma}\right)=\lim\frac{\alpha}{\beta}\cdot\lim\frac{\beta}{\gamma}=1,\text{即 }\alpha\sim\gamma.$$

习题 1-8　函数的连续性与间断点

1. 设 $y=f(x)$ 的图形如图 1-11 所示,试指出 $f(x)$ 的全部间断点,并对可去间断点补充或修改函数值的定义,使它成为连续点.

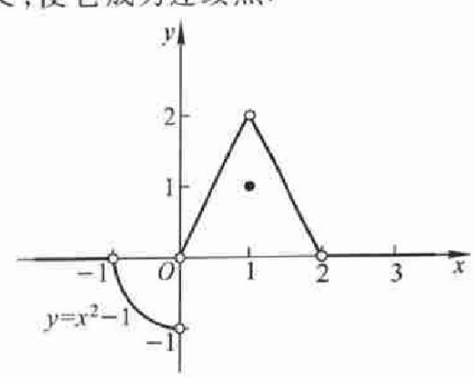


图 1-11

解　$x=-1,0,1,2$ 均为 $f(x)$ 的间断点，除 $x=0$ 外它们均为 $f(x)$ 的可去间断点．补充定义 $f(-1)=f(2)=0$，修改定义使 $f(1)=2$，则它们均成为 $f(x)$ 的连续点．

2. 研究下列函数的连续性，并画出函数的图形：

(1) $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2;\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}x, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & x<-1 \text{ 或 } x>1.\end{cases}$

解　(1) $f(x)$ 在 $[0,1)$ 及 $(1,2]$ 内连续，在 $x=1$ 处，

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}x^2=1,\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(2-x)=1,\text{又} f(1)=1,$$

故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，因此 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，函数的图形如图 1－12 所示．

(2) $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 与 $(-1,+\infty)$ 内连续，在 $x=-1$ 处间断，但右连续．因为在 $x=-1$ 处，

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}x=-1,f(-1)=-1,$$

但

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}1=1,$$

即

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)\neq\lim_{x\to-1^-}f(x).$$

函数的图形如图 1－13 所示．

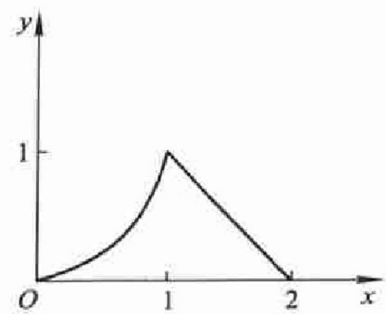


图 1－12

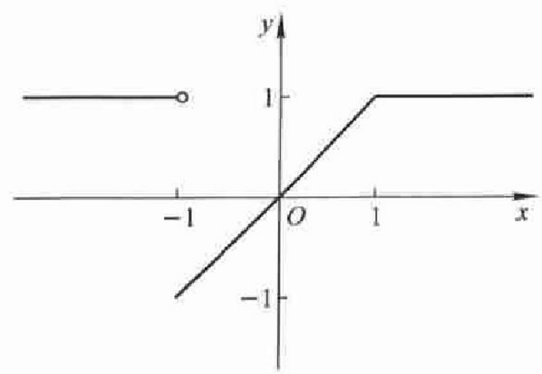


图 1－13

3. 下列函数在指出的点处间断，说明这些间断点属于哪一类．如果是可去间断点，那么补充或改变函数的定义使它连续：

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2},x=1,x=2;$

(2) $y=\dfrac{x}{\tan x},x=k\pi,x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots);$

(3) $y=\cos^2\dfrac{1}{x},x=0;$

(4) $y=\begin{cases}x-1, x\leqslant 1,\\ 3-x, x>1,\end{cases}\quad x=1.$

解　(1) 对 $x=1$，因为 $f(1)$ 无定义，但

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-2}=-2,$$

所以，$x=1$ 为第一类间断点（可去间断点），重新定义函数：

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}, & x\neq 1,2,\\ -2, & x=1,\end{cases}$$

则 $f_1(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

因为 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\infty$，所以 $x=2$ 为第二类间断点（无穷间断点）.

(2) 对 $x=0$，因为 $f(0)$ 无定义，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$，所以 $x=0$ 为第一类间断点（可去间断点），重新定义函数：

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\tan x}, & x\neq k\pi, k\pi+\dfrac{\pi}{2},\\ 1, & x=0\end{cases}\quad (k\in\mathbf{Z}),$$

则 $f_1(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

对 $x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$，因为 $\lim\limits_{x\to k\pi}\dfrac{x}{\tan x}=\infty$，所以 $x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为第二类间断点（无穷间断点）.

对 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，因为 $\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\dfrac{x}{\tan x}=0$，而函数在 $k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 处无定义，所以 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 为第一类间断点（可去间断点），重新定义函数：

$$f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\tan x}, & x\neq k\pi, k\pi+\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\quad (k\in\mathbf{Z}),$$

则 $f_2(x)$ 在 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 处连续.

(3) 对 $x=0$，因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\cos^2\dfrac{1}{x}$ 及 $\lim\limits_{x\to 0^-}\cos^2\dfrac{1}{x}$ 均不存在，所以 $x=0$ 为第二类间断点.

(4) 对 $x=1$，因为 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(3-x)=2$，$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)=0$，即左、右极限存在，但不相等，所以 $x=1$ 为第一类间断点（跳跃间断点）.

注　在讨论分段函数的连续性时，在函数的分段点处，必须分别考虑函数的左连续性和右连续性，只有函数在该点既左连续，又右连续，才能得出函数在该点

连续.

4. 讨论函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$的连续性,若有间断点,则判别其类型.

解

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=\begin{cases}-x, & |x|>1,\\ 0, & |x|=1,\\ x, & |x|<1.\end{cases}$$

在分段点$x=-1$处,因为

$$\lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^-}(-x)=1,$$
$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}x=-1,$$
$$\lim_{x\to -1^-}f(x)\neq\lim_{x\to -1^+}f(x),$$

所以$x=-1$为第一类间断点(跳跃间断点).

在分段点$x=1$处,因为

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}x=1,$$
$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(-x)=-1,$$
$$\lim_{x\to 1^-}f(x)\neq\lim_{x\to 1^+}f(x),$$

所以$x=1$为第一类间断点(跳跃间断点).

5. 下列陈述中,哪些是对的,哪些是错的?如果是对的,说明理由;如果是错的,试给出一个反例.

(1) 如果函数$f(x)$在a连续,那么$|f(x)|$也在a连续;

(2) 如果函数$|f(x)|$在a连续,那么$f(x)$也在a连续.

解　(1) 对.因为

$$\big||f(x)|-|f(a)|\big|\leqslant|f(x)-f(a)|\to 0(x\to a),$$

所以$|f(x)|$也在a连续.

(2) 错.例如

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

则$|f(x)|$在$x=0$处连续,而$f(x)$在$x=0$处不连续.

***6.** 证明:若函数$f(x)$在点x_0连续且$f(x_0)\neq 0$,则存在x_0的某一邻域$U(x_0)$,当$x\in U(x_0)$时,$f(x)\neq 0$.

证　若$f(x_0)>0$,因为$f(x)$在x_0连续,所以取$\varepsilon=\dfrac{1}{2}f(x_0)>0$,$\exists\delta>0$,当$x\in U(x_0,\delta)$时,有$|f(x)-f(x_0)|<\dfrac{1}{2}f(x_0)$,即

$$0<\frac{1}{2}f(x_0)<f(x)<\frac{3}{2}f(x_0).$$

若 $f(x_0)<0$，因为 $f(x)$ 在 x_0 连续，所以取 $\varepsilon=-\frac{1}{2}f(x_0)>0$，$\exists\delta>0$，当 $x\in U(x_0,\delta)$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<-\frac{1}{2}f(x_0)$，即

$$\frac{3}{2}f(x_0)<f(x)<\frac{1}{2}f(x_0)<0.$$

因此，不论 $f(x_0)>0$ 或 $f(x_0)<0$，总存在 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$，当 $x\in U(x_0)$ 时，$f(x)\neq0$.

*7. 设

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q},\end{cases}$$

证明：(1) $f(x)$ 在 $x=0$ 连续；

(2) $f(x)$ 在非零的 x 处都不连续.

证 (1) $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，则当 $|x-0|=|x|<\delta$ 时，

$$|f(x)-f(0)|=|f(x)|\leqslant|x|<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续.

(2) 我们证明：$\forall x_0\neq0$，$f(x)$ 在 x_0 不连续.

若 $x_0=r\neq0$，$r\in\mathbf{Q}$，则 $f(x_0)=f(r)=r$.

分别取一有理数列 $\{r_n\}$：$r_n\to r(n\to\infty)$，$r_n\neq r$；取一无理数列 $\{s_n\}$：$s_n\to r(n\to\infty)$，则

$$\lim_{n\to\infty}f(r_n)=\lim_{n\to\infty}r_n=r,\lim_{n\to\infty}f(s_n)=\lim_{n\to\infty}0=0,$$

而 $r\neq0$，由函数极限与数列极限的关系知 $\lim\limits_{x\to r}f(x)$ 不存在，故 $f(x)$ 在 r 处不连续.

若 $x_0=s$，$s\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$. 同理可证：$f(x_0)=f(s)=0$，但 $\lim\limits_{x\to s}f(x)$ 不存在，故 $f(x)$ 在 s 处不连续.

*8. 试举出具有以下性质的函数 $f(x)$ 的例子：

$x=0,\pm1,\pm2,\pm\frac{1}{2},\cdots,\pm n,\pm\frac{1}{n},\cdots$ 是 $f(x)$ 的所有间断点，且它们都是无穷间断点.

解 设 $f(x)=\cot(\pi x)+\cot\frac{\pi}{x}$，显然 $f(x)$ 具有所要求的性质.

习题 1－9 连续函数的运算与初等函数的连续性

1. 求函数 $f(x)=\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$ 的连续区间，并求极限 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to-3}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to2}f(x)$.

解 $f(x)$ 在 $x_1=-3,x_2=2$ 处无意义，所以这两个点为间断点，此外函数到处连续，连续区间为 $(-\infty,-3),(-3,2),(2,+\infty)$.

因为

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}=\frac{(x^2-1)(x+3)}{(x+3)(x-2)}=\frac{x^2-1}{x-2},$$

所以

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to -3}f(x)=-\frac{8}{5},\quad \lim_{x\to 2}f(x)=\infty.$$

2. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 连续，证明函数

$$\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\},\quad \psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$$

在点 x_0 也连续.

证 $\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]$,

$$\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|].$$

又，若 $f(x)$ 在点 x_0 连续，则 $|f(x)|$ 在点 x_0 也连续；由连续函数的和、差仍连续，故 $\varphi(x)$、$\psi(x)$ 在点 x_0 也连续.

3. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}$; (2) $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2\alpha)^3$;

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 2x)$; (4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}$; (6) $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}$;

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$; (8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{2}{3}}-1}{x\ln(1+x)}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}(x^2-2x+5)}=\sqrt{5}$.

(2) $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2\alpha)^3=(\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}\sin 2\alpha)^3=\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^3=1$.

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 2x)=\ln(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}2\cos 2x)=\ln\left(2\cos\frac{\pi}{3}\right)=\ln 1=0$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$.

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{4}{\sqrt{5x-4}+\sqrt{x}}=2$.

(6) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{2\sin\dfrac{x-\alpha}{2}\cos\dfrac{x+\alpha}{2}}{x-\alpha}$

$$=\lim_{x\to\alpha}\frac{\sin\dfrac{x-\alpha}{2}}{\dfrac{x-\alpha}{2}}\cdot\lim_{x\to\alpha}\cos\frac{x+\alpha}{2}=\cos\alpha.$$

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}}=1.$$

(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(1-\dfrac{1}{2}x^2\right)^{\frac{2}{3}}-1}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{2}{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}x^2\right)}{x\cdot x}=-\dfrac{1}{3}.$

注　本题及下一题求极限中,采用了以下几种常用的方法:

(1) 利用极限运算法则;

(2) 利用复合函数的连续性,将函数符号与极限号交换次序;

(3) 利用一些初等方法:因式分解,分子或分母有理化,分子分母同乘或除以一个不为零的因子,消去分母中趋于零的因子等;

(4) 利用重要极限以及它们的变形;

(5) 利用等价无穷小替代.

4. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\ln\dfrac{\sin x}{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to0}(1+3\tan^2x)^{\cot^2x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$;　　(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2x}-x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$;　　(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}-e^x+1}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)}-1}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=e^0=1.$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\ln\dfrac{\sin x}{x}=\ln\left(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\right)=\ln1=0.$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$

(4) $\lim\limits_{x\to0}(1+3\tan^2x)^{\cot^2x}=\lim\limits_{x\to0}[(1+3\tan^2x)^{\frac{1}{3}\cot^2x}]^3=e^3.$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{3}{6+x}\right)^{-\frac{6+x}{3}}\right]^{-\frac{3}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{6+x}\right)^{-\frac{7}{2}}=e^{-\frac{3}{2}}.$

(6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x(\sqrt{1+\sin^2 x}-1)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sec x-1}{\sqrt{1+\sin^2 x}-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\right)$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}\sin^2 x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$

$=1\cdot1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$

(7) $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}\xlongequal{x-e=t}\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(e+t)-\ln e}{t}=\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{e}\right)}{t}=\frac{1}{e}.$

(8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{3x}-e^{2x}-e^x+1}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)}-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(e^{2x}-1)(e^x-1)}{(1-x^2)^{\frac{1}{3}}-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x\cdot x}{-\frac{1}{3}x^2}=-6.$

5. 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，且 $f(x)\neq0$，$\varphi(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有定义，且有间断点，则下列陈述中，哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，试说明理由；如果是错的，试给出一个反例.

(1) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点； (2) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点；

(3) $f[\varphi(x)]$ 未必有间断点； (4) $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点.

解 (1) 错. 例如，$\varphi(x)=\operatorname{sgn}x$，$f(x)=e^x$，$\varphi[f(x)]\equiv1$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处连续.

(2) 错. 例如，$\varphi(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbf{Q},\\-1, x\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q},\end{cases}$ $[\varphi(x)]^2\equiv1$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处连续.

(3) 对. 例如，$\varphi(x)$ 同(2)，$f(x)=|x|+1$，$f[\varphi(x)]\equiv2$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处连续.

(4) 对. 因为，若 $F(x)=\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处连续，则 $\varphi(x)=F(x)\cdot f(x)$ 也在 $\mathbf{R}$ 上处处连续，这与已知条件矛盾.

6. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0,\\ a+x, & x\geqslant0.\end{cases}$$

应当怎样选择数 a，才能使得 $f(x)$ 成为在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数.

解 由初等函数的连续性，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 及 $(0,+\infty)$ 内连续，所以要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，只要选择数 a，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续即可.

在 $x=0$ 处，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}e^x=1$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(a+x)=a$，$f(0)=a$，取 $a=1$，即有

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0),$$

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 于是，选择 $a=1$，$f(x)$ 就成为在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数.

习题 1－10　闭区间上连续函数的性质

1. 假设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，并且对 $[0,1]$ 上任一点 x 有 $0\leqslant f(x)\leqslant1$. 试证明 $[0,1]$ 中必存在一点 c，使得 $f(c)=c$（c 称为函数 $f(x)$ 的不动点）.

证　设 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(0)=f(0)\geqslant0$，$F(1)=f(1)-1\leqslant0$.

若 $F(0)=0$ 或 $F(1)=0$，则 0 或 1 即为 $f(x)$ 的不动点；若 $F(0)>0$ 且 $F(1)<0$，则由零点定理，必存在 $c\in(0,1)$，使 $F(c)=0$，即 $f(c)=c$，这时 c 为 $f(x)$ 的不动点.

2. 证明方程 $x^5-3x=1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

证　设 $f(x)=x^5-3x-1$，则 $f(x)$ 在闭区间 $[1,2]$ 上连续，且 $f(1)=-3<0$，$f(2)=25>0$. 由零点定理，即知 $\exists\,\xi\in(1,2)$，使 $f(\xi)=0$，ξ 即为方程的根.

3. 证明方程 $x=a\sin x+b$，其中 $a>0$，$b>0$，至少有一个正根，并且它不超过 $a+b$.

证　设 $f(x)=x-a\sin x-b$，则 $f(x)$ 在闭区间 $[0,a+b]$ 上连续，且 $f(0)=-b<0$，$f(a+b)=a[1-\sin(a+b)]$. 当 $\sin(a+b)<1$ 时，$f(a+b)>0$，由零点定理，即知 $\exists\,\xi\in(0,a+b)$，使 $f(\xi)=0$，即 ξ 为原方程的根，它是正根且不超过 $a+b$；当 $\sin(a+b)=1$ 时，$f(a+b)=0$，$a+b$ 就是满足条件的正根.

4. 证明任一最高次幂的指数为奇数的代数方程

$$a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}=0$$

至少有一实根，其中 $a_0,a_1,\cdots,a_{2n+1}$ 均为常数，$n\in\mathbf{N}$.

证　当 x 的绝对值充分大时，$f(x)=a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}$ 的符号取决于 a_0 的符号，即当 x 为正时与 a_0 同号，当 x 为负时与 a_0 异号，而 $a_0\neq0$. 因 $f(x)$ 是连续函数，它在某充分大的区间的两端处异号，由零点定理可知它在区间内某一点处必定为零，故方程 $f(x)=0$ 至少有一实根.

5. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$ $(n\geqslant3)$，则在 (x_1,x_n) 内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

证　因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，又 $[x_1,x_n]\subset[a,b]$，所以 $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 上连续. 设

$$M=\max\{f(x)\mid x_1\leqslant x\leqslant x_n\},\ m=\min\{f(x)\mid x_1\leqslant x\leqslant x_n\},$$

则

$$m\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\leqslant M.$$

若上述不等式中为严格不等号，则由介值定理知，$\exists \xi \in (x_1, x_n)$，使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n};$$

若上述不等式中出现等号，如

$$m=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n},$$

则有 $f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_n)=m$，任取 $x_2,\cdots,x_{n-1}$ 中一点作为 ξ，即有 $\xi \in (x_1, x_n)$，使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

如

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}=M,$$

同理可证.

*6. 设函数 $f(x)$ 对于闭区间 $[a,b]$ 上的任意两点 x、y，恒有 $|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|$，其中 L 为正常数，且 $f(a)\cdot f(b)<0$. 证明：至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

证　任取 $x_0\in(a,b)$，$\forall \varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{L}, x_0-a, b-x_0\right\}$，则当 $|x-x_0|<\delta$ 时，由假设

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant L|x-x_0|<L\delta\leqslant\varepsilon,$$

所以 $f(x)$ 在 x_0 连续. 由 $x_0\in(a,b)$ 的任意性知，$f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

当 $x_0=a$ 或 $x_0=b$ 时，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{L}$，并将 $|x-x_0|<\delta$ 换成 $x\in[a,a+\delta)$ 或 $x\in(b-\delta,b]$，便可知 $f(x)$ 在 $x=a$ 右连续，在 $x=b$ 左连续. 从而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

又由假设 $f(a)\cdot f(b)<0$，由零点定理即知 $\exists \xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

*7. 证明：若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 必在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

证　设 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，则对 $\varepsilon=1>0$，$\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，有

$$|f(x)-A|<1\Rightarrow|f(x)|\leqslant|f(x)-A|+|A|<|A|+1.$$

又，$f(x)$ 在 $[-X,X]$ 上连续，利用有界性定理，得：$\exists M>0$，对 $\forall x\in[-X,X]$，有 $|f(x)|\leqslant M$.

取 $M'=\max\{M,|A|+1\}$，即有 $|f(x)|\leqslant M'$，　$\forall x\in(-\infty,+\infty)$.

*8. 在什么条件下，(a,b) 内的连续函数 $f(x)$ 为一致连续？

解　若 $f(a^+)$、$f(b^-)$ 均存在，设

$$F(x)=\begin{cases}f(a^+), & x=a,\\ f(x), & x\in(a,b),\\ f(b^-), & x=b.\end{cases}$$

易证 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，从而 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续，也就有 $F(x)$ 在 (a,b) 内一致连续，即 $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续.

总习题一

1. 在“充分”“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内：

(1) 数列 $\{x_n\}$ 有界是数列 $\{x_n\}$ 收敛的________条件，数列 $\{x_n\}$ 收敛是数列 $\{x_n\}$ 有界的________条件；

(2) $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的________条件，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在是 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界的________条件；

(3) $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内无界是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 的________条件，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 是 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内无界的________条件；

(4) $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限 $f(x_0^+)$ 及左极限 $f(x_0^-)$ 都存在且相等是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的________条件.

解 (1) 必要，充分.

(2) 必要，充分.

(3) 必要，充分.

(4) 充分必要.

2. 已知函数

$$f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{-x^2}, & 0<|x|<\dfrac{\pi}{2},\\ a, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 连续，则 $a=$________.

解 $a=f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{-x^2}=1.$

3. 以下两题中给出了四个结论，从中选出一个正确的结论：

(1) 设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则当 $x\to 0$ 时，有(　　).

(A) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小　(B) $f(x)$ 与 x 同阶但非等价无穷小

(C) $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小　(D) $f(x)$ 是比 x 低阶的无穷小

(2) 设

$$f(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1},$$

则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的(　　).

(A) 可去间断点　(B) 跳跃间断点

(C) 第二类间断点　(D) 连续点

解　(1) 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x+3^x-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}$$
$$=\ln 2+\ln 3=\ln 6\neq 1,$$

所以当 $x\to 0$ 时,$f(x)$ 与 x 同阶但非等价无穷小,应选(B).

(2) $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1$,$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$,因为 $f(0^+)$、$f(0^-)$ 均存在,但 $f(0^+)\neq f(0^-)$,所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点,应选(B).

4. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$,求下列函数的定义域:

(1) $f(e^x)$;　　(2) $f(\ln x)$;

(3) $f(\arctan x)$;　　(4) $f(\cos x)$.

解　(1) 因为 $0\leqslant e^x\leqslant 1$,所以 $x\leqslant 0$,即函数 $f(e^x)$ 的定义域为 $(-\infty,0]$.

(2) 因为 $0\leqslant \ln x\leqslant 1$,所以 $1\leqslant x\leqslant e$,即函数 $f(\ln x)$ 的定义域为 $[1,e]$.

(3) 因为 $0\leqslant \arctan x\leqslant 1$,所以 $0\leqslant x\leqslant \tan 1$,即函数 $f(\arctan x)$ 的定义域为 $[0,\tan 1]$.

(4) 因为 $0\leqslant \cos x\leqslant 1$,所以 $2n\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2n\pi+\frac{\pi}{2}$,$n\in\mathbf{Z}$,即函数 $f(\cos x)$ 的定义域为 $\left[2n\pi-\frac{\pi}{2},2n\pi+\frac{\pi}{2}\right]$,$n\in\mathbf{Z}$.

5. 设

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ x, & x>0,\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ -x^2, & x>0,\end{cases}$$

求 $f[f(x)]$,$g[g(x)]$,$f[g(x)]$,$g[f(x)]$.

解　因为 $f[f(x)]=\begin{cases}0, & f(x)\leqslant 0,\\ f(x), & f(x)>0,\end{cases}$ 而 $f(x)\geqslant 0$,$x\in\mathbf{R}$,所以

$$f[f(x)]=f(x),\quad x\in\mathbf{R}.$$

因为 $g[g(x)]=\begin{cases}0, & g(x)\leqslant 0,\\ -g^2(x), & g(x)>0,\end{cases}$ 而 $g(x)\leqslant 0$,$x\in\mathbf{R}$,所以

$$g[g(x)]=0,\quad x\in\mathbf{R}.$$

因为 $f[g(x)]=\begin{cases}0, & g(x)\leqslant 0,\\ g(x), & g(x)>0,\end{cases}$ 而 $g(x)\leqslant 0$,$x\in\mathbf{R}$,所以

$$f[g(x)]=0,\quad x\in\mathbf{R}.$$

因为 $g[f(x)]=\begin{cases}0, & f(x)\leqslant 0,\\ -f^2(x), & f(x)>0,\end{cases}$ 而 $f(x)\geqslant 0$,$x\in\mathbf{R}$,所以

$$g[f(x)]=g(x),\quad x\in\mathbf{R}.$$

6. 利用 $y=\sin x$ 的图形作出下列函数的图形:

（1）$y=|\sin x|$；　　（2）$y=\sin|x|$；　　（3）$y=2\sin\dfrac{x}{2}$.

解　（1）作 $y=\sin x$ 的图形在 x 轴下方的部分关于 x 轴的轴对称图形即可得 $y=|\sin x|$ 的图形，如图 1-14 所示.

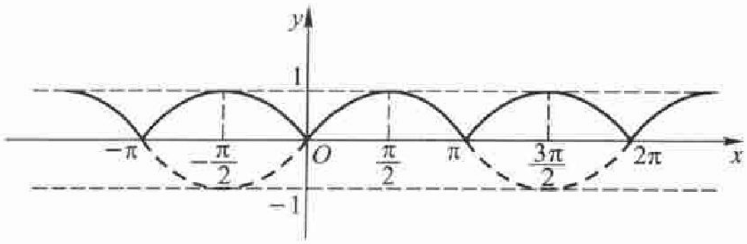


图 1-14

（2）因为 $y=\sin|x|$ 为偶函数，所以只要先画出 $y=\sin x$ 在 x 轴正方向上的图形，再对它作关于 y 轴的轴对称图形即可，如图 1-15 所示.

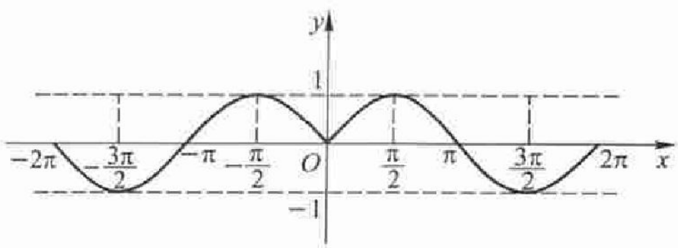


图 1-15

（3）将 $y=\sin x$ 的图形的振幅增大为 2，周期增大为 4π，如图 1-16 所示.

7. 把半径为 R 的一圆形铁皮，自圆心处剪去圆心角为 α 的一扇形后围成一无底圆锥. 试建立这圆锥的体积 V 与角 α 间的函数关系.

解　设围成的圆锥底半径为 r，高为 h，则按题意（图 1-17）有

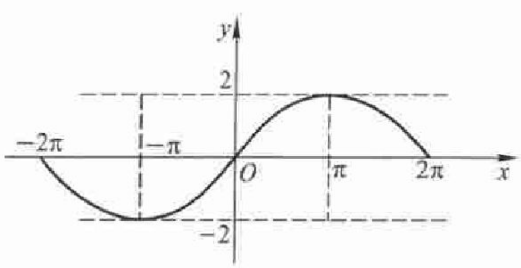


图 1-16

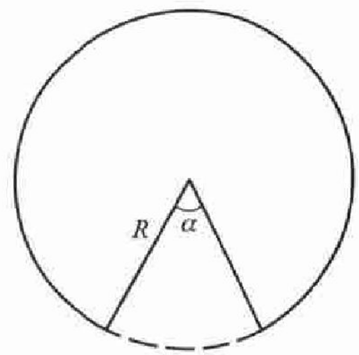


图 1-17

$$(2\pi-\alpha)R=2\pi r,$$

$$h=\sqrt{R^2-r^2}.$$

故

$$r=\frac{(2\pi-\alpha)R}{2\pi},$$

$$h=\sqrt{R^2-\frac{(2\pi-\alpha)^2}{4\pi^2}R^2}=\frac{\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}}{2\pi}R,$$

圆锥体积

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{(2\pi-\alpha)^2}{4\pi^2}R^2\cdot\frac{\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}}{2\pi}R\\&=\frac{R^3}{24\pi^2}(2\pi-\alpha)^2\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}\,(0<\alpha<2\pi).\end{aligned}$$

***8.** 根据函数极限的定义证明 $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-x-6}{x-3}=5$.

证 因为

$$\left|\frac{x^2-x-6}{x-3}-5\right|=\left|\frac{(x-3)(x+2)}{x-3}-5\right|=|x-3|,$$

要使 $\left|\frac{x^2-x-6}{x-3}-5\right|<\varepsilon$,只要 $|x-3|<\varepsilon$. 所以 $\forall\,\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon$,则当 $0<|x-3|<\delta$ 时,就有

$$\left|\frac{x^2-x-6}{x-3}-5\right|<\varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-x-6}{x-3}=5$.

9. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-x+1}{(x-1)^2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$;

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$;

(5) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}(a>0,b>0,c>0)$;

(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}(a>0)$;

(8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\tan x}{\sqrt{1-x^2}-1}$.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{x^2-x+1}=0$,所以 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-x+1}{(x-1)^2}=\infty$.

(2)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{2x+1}{2}}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{\frac{1}{2}}=\mathrm{e}.$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{\sec x-1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{2}x^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}.$

(5) 因为

$$\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)^{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}+\frac{c^x-1}{x}\right)},$$

而

$$\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)^{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}}\to\mathrm{e}\,(x\to0),$$

$$\frac{a^x-1}{x}\to\ln a,\quad\frac{b^x-1}{x}\to\ln b,\quad\frac{c^x-1}{x}\to\ln c\,(x\to0),$$

所以

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)}=(abc)^{\frac{1}{3}}.$$

(6) 因为$(\sin x)^{\tan x}=[1+(\sin x-1)]^{\frac{1}{\sin x-1}\cdot(\sin x-1)\tan x}$,而

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[1+(\sin x-1)]^{\frac{1}{\sin x-1}}=\mathrm{e},$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x-1)\tan x&=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\sin\dfrac{\pi}{2}}{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)}\cdot\sin x\\&=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin\dfrac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\cos\dfrac{x+\frac{\pi}{2}}{2}}{2\sin\dfrac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\cos\dfrac{x+\frac{\pi}{2}}{2}}\cdot\sin x\\&=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)}\cdot\sin x=0,\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}=\mathrm{e}^0=1.$$

(7) 令$x-a=t$,则$x=a+t$,当$x\to a$时,$t\to0$. 故

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{t}{a}\right)}{t}=\frac{1}{a}\lim_{t\to 0}\ln\left(1+\frac{t}{a}\right)^{\frac{a}{t}}=\frac{1}{a}.$$

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\tan x}{\sqrt{1-x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{-\dfrac{1}{2}x^2}=-2.$

10. 设

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ a+x^2, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，应当怎样选择数 a？

解　$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 及 $(0,+\infty)$ 内均连续，要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，只要选择数 a，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续即可．而

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x\sin\frac{1}{x}=0,\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(a+x^2)=a,$$

又 $f(0)=a$，故应选择 $a=0$，使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，从而 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续．

11. 设

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}},$$

求 $f(x)$ 的间断点，并说明间断点所属类型．

解　$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}=\begin{cases}1+x, & \text{当 } |x|<1 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } |x|>1 \text{ 或 } x=-1 \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } x=1 \text{ 时}.\end{cases}$

$x=\pm 1$ 为分段函数的分段点．$x=-1$ 处，因为 $f(-1^-)=f(-1^+)=f(-1)=0$，所以 $x=-1$ 为连续点；$x=1$ 处，因为 $f(1^-)=2$，$f(1^+)=0$，$f(1^-)\neq f(1^+)$，所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的间断点，属第一类间断点，是跳跃间断点．

12. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

证　因为 $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}<1$，而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}=1,\quad \lim_{n\to\infty}1=1,$$

由夹逼准则，即得证．

13. 证明方程 $\sin x+x+1=0$ 在开区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个根．

证　设$f(x)=\sin x+x+1$，则$f(x)$在$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上连续. 因为

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}+1=-\frac{\pi}{2}<0,$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+1=\frac{\pi}{2}+2>0,$$

由介值定理，至少存在一点$\xi\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，使$f(\xi)=0$，即$\sin\xi+\xi+1=0$. 所以方程$\sin x+x+1=0$在$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$内至少有一个根.

14. 如果存在直线$L:y=kx+b$，使得当$x\to\infty$（或$x\to+\infty$，$x\to-\infty$）时，曲线$y=f(x)$上的动点$M(x,y)$到直线L的距离$d(M,L)\to 0$，则称L为曲线$y=f(x)$的渐近线. 当直线L的斜率$k\neq 0$时，称L为斜渐近线.

（1）证明：直线$L:y=kx+b$为曲线$y=f(x)$的渐近线的充分必要条件是

$$k=\lim_{\substack{x\to\infty\\ \left(\substack{x\to+\infty\\ x\to-\infty}\right)}}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{\substack{x\to\infty\\ \left(\substack{x\to+\infty\\ x\to-\infty}\right)}}[f(x)-kx];$$

（2）求曲线$y=(2x-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$的斜渐近线.

解　（1）就$x\to+\infty$的情形证明，其他情形类似.

设$L:y=kx+b$为曲线$y=f(x)$的渐近线.

1°若$k\neq 0$，如图1－18所示，$k=\tan\alpha$ $\left(\alpha\text{为}L\text{的倾角}，\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}\right)$，曲线$y=f(x)$上动点$M(x,y)$到直线$L$的距离为$|MK|$. 过$M$作横轴的垂线，交直线$L$于$K_1$，则

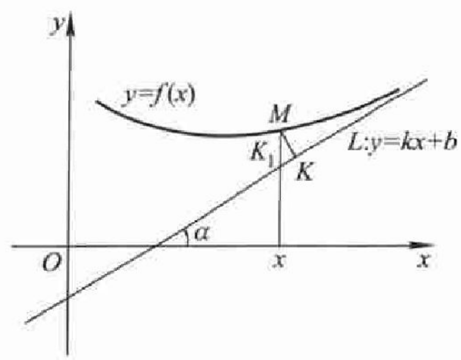


图1－18

$$|MK_1|=\frac{|MK|}{\cos\alpha}.$$

显然$|MK|\to 0\ (x\to+\infty)$与$|MK_1|\to 0\ (x\to+\infty)$等价，而

$$|MK_1|=|f(x)-(kx+b)|.$$

因为$L:y=kx+b$是曲线$y=f(x)$的渐近线，所以

$$|MK|\to 0(x\to+\infty)\Rightarrow |MK_1|\to 0(x\to+\infty),$$

即

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0, \tag{1}$$

从而

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]+b=0+b=b, \tag{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}[f(x)-kx]+k=0+k=k. \tag{3}$$

反之,若(2)、(3)成立,则(1)成立,即 $L:y=kx+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的渐近线.

2°若 $k=0$,设 $L:y=b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线,如图 1-19 所示. 按定义有 $|MK|\to 0\ (x\to+\infty)$,而 $|MK|=|f(x)-b|$,故有

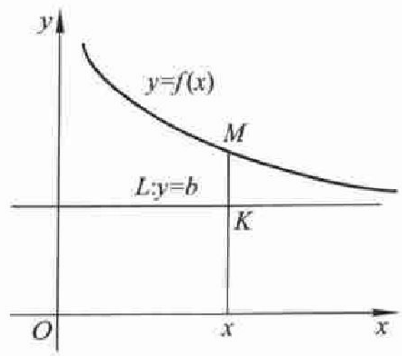


图 1-19

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=b, \tag{4}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}f(x)=0. \tag{5}$$

反之,若(4)、(5)成立,即有 $|MK|=|f(x)-b|\to 0(x\to+\infty)$,故 $y=b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

(2) 因为

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)}{x}e^{\frac{1}{x}}=2,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-2x]=\lim_{x\to\infty}[(2x-1)e^{\frac{1}{x}}-2x]=\lim_{x\to\infty}2x(e^{\frac{1}{x}}-1)-\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}$$

$$=2\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}-1=2\lim_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}-1=2\ln e-1=1,$$

所以,所求曲线的斜渐近线为 $y=2x+1$.

第二章

导数与微分

习题 2－1　导数概念

1. 设物体绕定轴旋转，在时间间隔$[0,t]$上转过角度θ，从而转角θ是t的函数：$\theta=\theta(t)$. 如果旋转是匀速的，那么称$\omega=\dfrac{\theta}{t}$为该物体旋转的角速度. 如果旋转是非匀速的，应怎样确定该物体在时刻t_0的角速度？

解　物体在时间间隔$[t_0,t_0+\Delta t]$上的平均角速度

$$\overline{\omega}=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{\theta(t_0+\Delta t)-\theta(t_0)}{\Delta t}.$$

在时刻t_0的角速度

$$\omega=\lim_{\Delta t\to0}\overline{\omega}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\theta'(t_0).$$

2. 当物体的温度高于周围介质的温度时，物体就不断冷却. 若物体的温度T与时间t的函数关系为$T=T(t)$，应怎样确定该物体在时刻t的冷却速度？

解　物体在时间间隔$[t,t+\Delta t]$上平均冷却速度

$$\bar{v}=\frac{\Delta T}{\Delta t}=\frac{T(t+\Delta t)-T(t)}{\Delta t}.$$

在时刻t的冷却速度

$$v=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta T}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{T(t+\Delta t)-T(t)}{\Delta t}=T'(t).$$

3. 设某工厂生产x件产品的成本为

$$C(x)=2\,000+100x-0.1x^2(\text{元}),$$

函数$C(x)$称为成本函数，成本函数$C(x)$的导数$C'(x)$在经济学中称为边际成本. 试求

（1）当生产100件产品时的边际成本；

（2）生产第101件产品的成本，并与（1）中求得的边际成本作比较，说明边际成本的实际意义.

解　（1）$C'(x)=100-0.2x$,

$C'(100)=100-20=80$（元/件）.

（2）$C(101)=2\,000+100\times101-0.1\times(101)^2=11\,079.9$（元），

$C(100)=2\,000+100\times100-0.1\times(100)^2=11\,000$（元），

$C(101)-C(100)=11\,079.9-11\,000=79.9$（元）.

即生产第 101 件产品的成本为 79.9 元,与(1)中求得的边际成本比较,可以看出边际成本 $C'(x)$ 的实际意义是近似表达产量达到 x 单位时再增加一个单位产品所需的成本.

4. 设 $f(x)=10x^2$,试按定义求 $f'(-1)$.

解 $$f'(-1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{10(-1+\Delta x)^2-10(-1)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-20\Delta x+10(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(-20+10\Delta x)=-20.$$

5. 证明 $(\cos x)'=-\sin x$.

证 $$(\cos x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[-\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right]\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=-\sin x.$$

6. 下列各题中均假定 $f'(x_0)$ 存在,按照导数定义观察下列极限,指出 A 表示什么:

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$,其中 $f(0)=0$,且 $f'(0)$ 存在;

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=A$.

解 (1) $$A=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$=-\lim_{-\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+(-\Delta x))-f(x_0)}{-\Delta x}=-f'(x_0).$$

(2) 由于 $f(0)=0$,故 $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$.

(3) $$A=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}\right]$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim_{-h\to 0}\frac{f(x_0+(-h))-f(x_0)}{-h}$$
$$=2f'(x_0).$$

以下两题中给出了四个结论,从中选出一个正确的结论:

7. 设

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}x^3, & x \leqslant 1, \\ x^2, & x > 1, \end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的(　　).

(A) 左、右导数都存在　　(B) 左导数存在，右导数不存在

(C) 左导数不存在，右导数存在　　(D) 左、右导数都不存在

解
$$f'_-(1) = \lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to1^-}\frac{2}{3}\cdot\frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{2}{3}(x^2+x+1) = 2;$$
$$f'_+(1) = \lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{x^2-\frac{2}{3}}{x-1} = \infty,$$

故该函数左导数存在，右导数不存在，因此应选(B).

8. 设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的(　　).

(A) 充分必要条件　　(B) 充分条件但非必要条件

(C) 必要条件但非充分条件　　(D) 既非充分条件又非必要条件

解
$$F'_+(0) = \lim_{x\to0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+}\frac{f(x)(1+\sin x)-f(0)}{x} = \frac{f(x)+f(x)\sin x - f}{x}$$
$$f(x)$$
$$= \lim_{x\to0^+}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}+f(x)\frac{\sin x}{x}\right] = f'(0)+f(0),$$
$$F'_-(0) = \lim_{x\to0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^-}\frac{f(x)(1-\sin x)-f(0)}{x}$$
$$= \lim_{x\to0^-}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}-f(x)\frac{\sin x}{x}\right] = f'(0)-f(0).$$

当 $f(0)=0$ 时，$F'_+(0)=F'_-(0)$，反之当 $F'_+(0)=F'_-(0)$ 时，$f(0)=0$，因此应选(A).

9. 求下列函数的导数：

(1) $y=x^4$；　(2) $y=\sqrt[3]{x^2}$；　(3) $y=x^{1.6}$；

(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$；　(5) $y=\dfrac{1}{x^2}$；　(6) $y=x^3\sqrt[5]{x}$；

(7) $y=\dfrac{x^2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^5}}$.

解 (1) $y'=4x^3$.

(2) $y=x^{\frac{2}{3}}$，$y'=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$.

(3) $y'=1.6x^{0.6}$.

(4) $y=x^{-\frac{1}{2}}, y'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$.

(5) $y=x^{-2}, y'=-2x^{-3}$.

(6) $y=x^{\frac{16}{5}}, y'=\frac{16}{5}x^{\frac{11}{5}}$.

(7) $y=x^{2+\frac{2}{3}-\frac{5}{2}}=x^{\frac{1}{6}}, y'=\frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$.

10. 已知物体的运动规律为 $s=t^3$ m,求这物体在 $t=2$ s 时的速度.

解
$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=3t^2,\quad v|_{t=2}=12(\mathrm{m/s}).$$

11. 如果 $f(x)$ 为偶函数,且 $f'(0)$ 存在,证明 $f'(0)=0$.

证　$f(x)$ 为偶函数,故有 $f(-x)=f(x)$. 因为

$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(-x)-f(0)}{x-0}\\&=-\lim_{-x\to0}\frac{f(-x)-f(0)}{-x-0}\\&=-f'(0),\end{aligned}$$

所以 $f'(0)=0$.

12. 求曲线 $y=\sin x$ 在具有下列横坐标的各点处切线的斜率:

$$x=\frac{2}{3}\pi,\quad x=\pi.$$

解　由导数的几何意义知

$$k_1=y'|_{x=\frac{2}{3}\pi}=\cos x|_{x=\frac{2}{3}\pi}=-\frac{1}{2},\quad k_2=y'|_{x=\pi}=\cos x|_{x=\pi}=-1.$$

13. 求曲线 $y=\cos x$ 上点 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$ 处的切线方程和法线方程.

解
$$y'|_{x=\frac{\pi}{3}}=(-\sin x)|_{x=\frac{\pi}{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

故曲线在点 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$ 处的切线方程为

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right),$$

即 $\frac{\sqrt{3}}{2}x+y-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\pi\right)=0$.

曲线在点 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$ 处的法线方程为

$$y-\frac{1}{2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{\pi}{3}\right),$$

即$\frac{2\sqrt{3}}{3}x-y+\frac{1}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi=0$.

14. 求曲线 $y=e^x$ 在点(0,1)处的切线方程.

解
$$y'|_{x=0}=e^x|_{x=0}=1,$$
故曲线在(0,1)处的切线方程为
$$y-1=1\cdot(x-0),$$
即 $x-y+1=0$.

15. 在抛物线 $y=x^2$ 上取横坐标为 $x_1=1$ 及 $x_2=3$ 的两点,作过这两点的割线.问该抛物线上哪一点的切线平行于这条割线?

解　割线的斜率
$$k=\frac{3^2-1^2}{3-1}=\frac{8}{2}=4.$$
假设抛物线上点(x_0,x_0^2)处的切线平行于该割线,则有
$$(x^2)'|_{x=x_0}=4,\text{即 } 2x_0=4.$$
故 $x_0=2$,由此得所求点为(2,4).

16. 讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性与可导性:

(1) $y=|\sin x|$;

(2) $y=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}|\sin x|=0=f(0)$,故 $y=|\sin x|$在 $x=0$ 处连续.又
$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin x}{x}=-1,$$
$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1,$$
$f'_-(0)\neq f'_+(0)$,故 $y=|\sin x|$在 $x=0$ 处不可导.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0=f(0)$,故函数在 $x=0$ 处连续.又
$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0,$$
故函数在 $x=0$ 处可导.

17. 设函数
$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ ax+b, & x>1.\end{cases}$$
为了使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且可导,a、b 应取什么值?

解　要函数$f(x)$在$x=1$处连续，应有

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^+}f(x)=f(1),$$

即$1=a+b$.

要函数$f(x)$在$x=1$处可导，应有$f'_-(1)=f'_+(1)$. 而

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=2,$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{ax+b-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{a(x-1)+a+b-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{a(x-1)}{x-1}=a.$$

故$a=2,b=-1$.

18. 已知$f(x)=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant0,\end{cases}$求$f'_+(0)$及$f'_-(0)$，又$f'(0)$是否存在？

解

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x-0}{x}=-1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2-0}{x}=0.$$

由于$f'_-(0)\neq f'_+(0)$，故$f'(0)$不存在.

19. 已知$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ x, & x\geqslant0,\end{cases}$ 求$f'(x)$.

解

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x}=1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x}=1.$$

由于$f'_-(0)=f'_+(0)=1$，故$f'(0)=1$. 因此

$$f'(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ 1, & x\geqslant0.\end{cases}$$

20. 证明：双曲线$xy=a^2$上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形的面积都等于$2a^2$.

证　设(x_0,y_0)为双曲线$xy=a^2$上任一点，曲线在该点处的切线斜率

$$k=\left(\frac{a^2}{x}\right)'\Bigg|_{x=x_0}=-\frac{a^2}{x_0^2},$$

切线方程为

$$y-y_0=-\frac{a^2}{x_0^2}(x-x_0)\text{或}\frac{x}{2x_0}+\frac{y}{2y_0}=1,$$

由此可得所构成的三角形的面积为

$$A=\frac{1}{2}|2x_0||2y_0|=2a^2.$$

习题 2-2 函数的求导法则

1. 推导余切函数及余割函数的导数公式：

$$(\cot x)'=-\csc^2 x,\quad (\csc x)'=-\csc x\cot x.$$

解 $(\cot x)'=\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)'=\dfrac{-\sin x\sin x-\cos x\cos x}{\sin^2 x}=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x.$

$(\csc x)'=\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)'=\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}=-\csc x\cot x.$

2. 求下列函数的导数：

(1) $y=x^3+\dfrac{7}{x^4}-\dfrac{2}{x}+12$;

(2) $y=5x^3-2^x+3e^x$;

(3) $y=2\tan x+\sec x-1$;

(4) $y=\sin x\cos x$;

(5) $y=x^2\ln x$;

(6) $y=3e^x\cos x$;

(7) $y=\dfrac{\ln x}{x}$;

(8) $y=\dfrac{e^x}{x^2}+\ln 3$;

(9) $y=x^2\ln x\cos x$;

(10) $s=\dfrac{1+\sin t}{1+\cos t}$.

解 (1) $y'=3x^2-\dfrac{28}{x^5}+\dfrac{2}{x^2}$.

(2) $y'=15x^2-2^x\ln 2+3e^x$.

(3) $y'=2\sec^2 x+\sec x\tan x=\sec x(2\sec x+\tan x)$.

(4) $y'=\left(\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)'=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cos 2x=\cos 2x$.

(5) $y'=2x\ln x+x^2\cdot\dfrac{1}{x}=x(2\ln x+1)$.

(6) $y'=3e^x\cos x-3e^x\sin x=3e^x(\cos x-\sin x)$.

(7) $y'=\dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

(8) $y'=\dfrac{e^x\cdot x^2-2xe^x}{x^4}=\dfrac{e^x(x-2)}{x^3}$.

(9) $y'=2x\ln x\cos x+x^2\cdot\dfrac{1}{x}\cos x+x^2\ln x(-\sin x)$

$=2x\ln x\cos x+x\cos x-x^2\ln x\sin x$.

(10) $s'=\dfrac{\cos t(1+\cos t)-(1+\sin t)(-\sin t)}{(1+\cos t)^2}=\dfrac{1+\sin t+\cos t}{(1+\cos t)^2}.$

3. 求下列函数在给定点处的导数:

(1) $y=\sin x-\cos x$,求 $y'|_{x=\frac{\pi}{6}}$ 和 $y'|_{x=\frac{\pi}{4}}$;

(2) $\rho=\theta\sin\theta+\dfrac{1}{2}\cos\theta$,求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}$;

(3) $f(x)=\dfrac{3}{5-x}+\dfrac{x^2}{5}$,求 $f'(0)$ 和 $f'(2)$.

解 (1) $y'=\cos x+\sin x,y'|_{x=\frac{\pi}{6}}=\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$,

$$y'|_{x=\frac{\pi}{4}}=\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}.$$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}=\sin\theta+\theta\cos\theta+\dfrac{1}{2}(-\sin\theta)=\dfrac{1}{2}\sin\theta+\theta\cos\theta$,

$\left.\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right).$

(3) $f'(x)=\dfrac{3}{(5-x)^2}+\dfrac{2}{5}x$, $f'(0)=\dfrac{3}{25}$, $f'(2)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{5}=\dfrac{17}{15}.$

4. 以初速 v_0 竖直上抛的物体,其上升高度 s 与时间 t 的关系是 $s=v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2$. 求:

(1) 该物体的速度 $v(t)$;(2) 该物体达到最高点的时刻.

解 (1) $v(t)=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v_0-gt.$

(2) 物体达到最高点的时刻 $v=0$,即 $v_0-gt=0$,故 $t=\dfrac{v_0}{g}.$

5. 求曲线 $y=2\sin x+x^2$ 上横坐标为 $x=0$ 的点处的切线方程和法线方程.

解

$$y'=2\cos x+2x,y'|_{x=0}=2,y|_{x=0}=0,$$

因此曲线在点(0,0)处的切线方程为

$$y-0=2(x-0),$$

即 $2x-y=0$,法线方程为

$$y-0=-\frac{1}{2}(x-0),$$

即 $x+2y=0$.

6. 求下列函数的导数:

(1) $y=(2x+5)^4$; (2) $y=\cos(4-3x)$;

(3) $y=\mathrm{e}^{-3x^2}$; (4) $y=\ln(1+x^2)$;

(5) $y=\sin^2 x$; (6) $y=\sqrt{a^2-x^2}$;

(7) $y=\tan x^2$; (8) $y=\arctan(e^x)$;

(9) $y=(\arcsin x)^2$; (10) $y=\ln\cos x$.

解 (1) $y'=4(2x+5)^3\cdot 2=8(2x+5)^3$.

(2) $y'=-\sin(4-3x)(-3)=3\sin(4-3x)$.

(3) $y'=e^{-3x^2}\cdot(-6x)=-6xe^{-3x^2}$.

(4) $y'=\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x=\frac{2x}{1+x^2}$.

(5) $y'=2\sin x\cos x=\sin 2x$.

(6) $y'=\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

(7) $y'=\sec^2 x^2\cdot 2x=2x\sec^2 x^2$.

(8) $y'=\frac{1}{1+(e^x)^2}\cdot e^x=\frac{e^x}{1+e^{2x}}$.

(9) $y'=2\arcsin x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x$.

(10) $y'=\frac{1}{\cos x}(-\sin x)=-\tan x$.

7. 求下列函数的导数：

(1) $y=\arcsin(1-2x)$; (2) $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(3) $y=e^{-\frac{x}{2}}\cos 3x$; (4) $y=\arccos\frac{1}{x}$;

(5) $y=\frac{1-\ln x}{1+\ln x}$; (6) $y=\frac{\sin 2x}{x}$;

(7) $y=\arcsin\sqrt{x}$; (8) $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$;

(9) $y=\ln(\sec x+\tan x)$; (10) $y=\ln(\csc x-\cot x)$.

解 (1) $y'=\frac{1}{\sqrt{1-(1-2x)^2}}\cdot(-2)=-\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$.

(2) $y'=\frac{-\frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}}{(\sqrt{1-x^2})^2}=\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

(3) $y'=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\cos 3x-3e^{-\frac{x}{2}}\sin 3x$

$=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(\cos 3x+6\sin 3x)$.

(4) $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}}.$

(5) $y' = \dfrac{-\dfrac{1}{x}(1+\ln x)-(1-\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}}{(1+\ln x)^2} = -\dfrac{2}{x(1+\ln x)^2}.$

(6) $y' = \dfrac{2x\cos 2x - \sin 2x}{x^2}.$

(7) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}.$

(8) $y' = \dfrac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}}\right) = \dfrac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}} \cdot \dfrac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}.$

(9) $y' = \dfrac{1}{\sec x + \tan x}(\sec x\tan x + \sec^2 x) = \sec x.$

(10) $y' = \dfrac{1}{\csc x - \cot x}(-\csc x\cot x + \csc^2 x) = \csc x.$

8. 求下列函数的导数:

(1) $y = \left(\arcsin \dfrac{x}{2}\right)^2$;

(2) $y = \ln\tan \dfrac{x}{2}$;

(3) $y = \sqrt{1+\ln^2 x}$;

(4) $y = e^{\arctan\sqrt{x}}$;

(5) $y = \sin^n x\cos nx$;

(6) $y = \arctan \dfrac{x+1}{x-1}$;

(7) $y = \dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$;

(8) $y = \ln\ln\ln x$;

(9) $y = \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$;

(10) $y = \arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

解 (1) $y' = 2\arcsin \dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{2\arcsin \dfrac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}.$

(2) $y' = \dfrac{1}{\tan \dfrac{x}{2}} \cdot \sec^2 \dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2\sin \dfrac{x}{2}\cos \dfrac{x}{2}} = \dfrac{1}{\sin x} = \csc x.$

(3) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+\ln^2 x}} \cdot 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}.$

(4) $y' = e^{\arctan\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} e^{\arctan\sqrt{x}}$.

(5) $y' = n\sin^{n-1}x\cos x\cos nx + \sin^n x(-\sin nx)\cdot n$

$= n\sin^{n-1}x(\cos x\cos nx - \sin x\sin nx)$

$= n\sin^{n-1}x\cos(n+1)x$.

(6) $y' = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \dfrac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2+(x+1)^2}$

$= -\dfrac{1}{1+x^2}$.

(7) $y' = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x - \arcsin x\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{(\arccos x)^2}$

$= \dfrac{\arccos x + \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}(\arccos x)^2} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}(\arccos x)^2}$.

(8) $y' = \dfrac{1}{\ln\ln x} \cdot \dfrac{1}{\ln x} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x\ln x\ln\ln x}$.

(9) $y' =$

$$\frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})-(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})\left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2+\frac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^2}{2+2\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1}{4}\frac{2+2}{(1+\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}.$$

(10) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)^2}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}} \cdot \dfrac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}$

$= -\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1-x}{1+x}}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}} \cdot \dfrac{1}{(1+x)^2}$

$= -\dfrac{1}{\sqrt{2x}(1+x)\sqrt{1-x}} = -\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}$.

9. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 可导，且 $f^2(x)+g^2(x)\neq 0$，试求函数 $y=\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$ 的导数.

解 $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}[2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x)]$

$= \dfrac{f(x)f'(x)+g(x)g'(x)}{\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}$.

10. 设 $f(x)$ 可导,求下列函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$:

(1) $y=f(x^2)$; (2) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$.

解 (1) $y'=f'(x^2)2x=2xf'(x^2)$.

(2) $y'=f'(\sin^2 x)2\sin x\cos x+f'(\cos^2 x)2\cos x(-\sin x)$

$=\sin 2x[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)]$.

11. 求下列函数的导数:

(1) $y=e^{-x}(x^2-2x+3)$; (2) $y=\sin^2 x\cdot\sin(x^2)$;

(3) $y=\left(\arctan\dfrac{x}{2}\right)^2$; (4) $y=\dfrac{\ln x}{x^n}$;

(5) $y=\dfrac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$; (6) $y=\ln\cos\dfrac{1}{x}$;

(7) $y=e^{-\sin^2\frac{1}{x}}$; (8) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$;

(9) $y=x\arcsin\dfrac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$; (10) $y=\arcsin\dfrac{2t}{1+t^2}$.

解 (1) $y'=-e^{-x}(x^2-2x+3)+e^{-x}(2x-2)=e^{-x}(-x^2+4x-5)$.

(2) $y'=2\sin x\cos x\cdot\sin(x^2)+\sin^2 x\cos(x^2)\cdot 2x$

$=\sin 2x\sin(x^2)+2x\sin^2 x\cos(x^2)$.

(3) $y'=2\arctan\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{4+x^2}\arctan\dfrac{x}{2}$.

(4) $y'=\dfrac{\dfrac{1}{x}x^n-nx^{n-1}\ln x}{x^{2n}}=\dfrac{1-n\ln x}{x^{n+1}}$.

(5) $y'=\dfrac{(e^t+e^{-t})(e^t+e^{-t})-(e^t-e^{-t})(e^t-e^{-t})}{(e^t+e^{-t})^2}$

$=\dfrac{4}{(e^t+e^{-t})^2}$.

或 $y'=(\mathrm{th}\ t)'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 t}$.

(6) $y'=\dfrac{1}{\cos\dfrac{1}{x}}\left(-\sin\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{1}{x^2}\tan\dfrac{1}{x}$.

(7) $y'=e^{-\sin^2\frac{1}{x}}\left(-2\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2}\sin\frac{2}{x}e^{-\sin^2\frac{1}{x}}$.

(8) $y'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

(9) $y'=\arcsin\frac{x}{2}+x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2}+\frac{(-2x)}{2\sqrt{4-x^2}}$

$$=\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}=\arcsin\frac{x}{2}.$$

(10) $y'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2}}\cdot\frac{2(1+t^2)-2t\cdot 2t}{(1+t^2)^2}$

$$=\frac{1+t^2}{\sqrt{(1-t^2)^2}}\cdot\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}=\frac{2(1-t^2)}{|1-t^2|(1+t^2)}$$

$$=\begin{cases}\frac{2}{1+t^2}, |t|<1,\\ -\frac{2}{1+t^2}, |t|>1.\end{cases}$$

*12. 求下列函数的导数：

(1) $y=\operatorname{ch}(\operatorname{sh} x)$;　　(2) $y=\operatorname{sh} x\cdot e^{\operatorname{ch} x}$;

(3) $y=\operatorname{th}(\ln x)$;　　(4) $y=\operatorname{sh}^3x+\operatorname{ch}^2x$;

(5) $y=\operatorname{th}(1-x^2)$;　　(6) $y=\operatorname{arsh}(x^2+1)$;

(7) $y=\operatorname{arch}(e^{2x})$;　　(8) $y=\arctan(\operatorname{th} x)$;

(9) $y=\ln\operatorname{ch} x+\frac{1}{2\operatorname{ch}^2x}$;　　(10) $y=\operatorname{ch}^2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

解　(1) $y'=\operatorname{sh}(\operatorname{sh} x)\cdot\operatorname{ch} x=\operatorname{ch} x\operatorname{sh}(\operatorname{sh} x)$.

(2) $y'=\operatorname{ch} xe^{\operatorname{ch} x}+\operatorname{sh} xe^{\operatorname{ch} x}\operatorname{sh} x=e^{\operatorname{ch} x}(\operatorname{ch} x+\operatorname{sh}^2x)$.

(3) $y'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2(\ln x)}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x\operatorname{ch}^2(\ln x)}$.

(4) $y'=3\operatorname{sh}^2x\operatorname{ch} x+2\operatorname{ch} x\operatorname{sh} x=\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x(3\operatorname{sh} x+2)$.

(5) $y'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2(1-x^2)}\cdot(-2x)=-\frac{2x}{\operatorname{ch}^2(1-x^2)}$.

(6) $y'=\frac{1}{\sqrt{1+(x^2+1)^2}}\cdot 2x=\frac{2x}{\sqrt{x^4+2x^2+2}}$.

(7) $y'=\frac{1}{\sqrt{(e^{2x})^2-1}}\cdot e^{2x}\cdot 2=\frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}-1}}$.

(8) $y' = \dfrac{1}{1+(\text{th}\, x)^2} \cdot \dfrac{1}{\text{ch}^2 x} = \dfrac{1}{1+\dfrac{\text{sh}^2 x}{\text{ch}^2 x}} \cdot \dfrac{1}{\text{ch}^2 x} = \dfrac{1}{\text{ch}^2 x + \text{sh}^2 x}$

$= \dfrac{1}{1+2\text{sh}^2 x}.$

(9) $y' = \dfrac{1}{\text{ch}\, x}\text{sh}\, x - \dfrac{1}{(2\text{ch}^2 x)^2} \cdot 4\text{ch}\, x\text{sh}\, x = \dfrac{\text{sh}\, x}{\text{ch}\, x} - \dfrac{\text{sh}\, x}{\text{ch}^3 x}$

$= \dfrac{\text{sh}\, x(\text{ch}^2 x - 1)}{\text{ch}^3 x} = \dfrac{\text{sh}^3 x}{\text{ch}^3 x} = \text{th}^3 x.$

(10) $y' = 2\text{ch}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\text{sh}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) \cdot \dfrac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}$

$= \dfrac{2}{(x+1)^2}\text{sh}\left(2 \cdot \dfrac{x-1}{x+1}\right).$

13. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在点 x_0 的某一邻域内有定义，$f(x)$ 在 x_0 处可导，$f(x_0)=0$，$g(x)$ 在 x_0 处连续，试讨论 $f(x)g(x)$ 在 x_0 处的可导性.

解　由 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $f(x_0)=0$，则有

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{x-x_0};$$

由 $g(x)$ 在 x_0 处连续，则有 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$，故

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{x-x_0} g(x) = f'(x_0)g(x_0),$$

即 $f(x)g(x)$ 在 x_0 处可导，其导数为 $f'(x_0)g(x_0)$.

14. 设函数 $f(x)$ 满足下列条件：

(1) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$，对一切 $x, y \in \mathbf{R}$；

(2) $f(x) = 1 + xg(x)$，而 $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1$.

试证明 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处可导，且 $f'(x) = f(x)$.

证　由(2)知 $f(0)=1$，故

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[f(x) \cdot \frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}\right] = \lim_{\Delta x \to 0}\left[f(x) \cdot \frac{\Delta x g(\Delta x)}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}[f(x)g(\Delta x)] = f(x) \cdot 1 = f(x).$$

习题 2-3　　高阶导数

1. 求下列函数的二阶导数：

(1) $y = 2x^2 + \ln x$；　　　　(2) $y = \text{e}^{2x-1}$；

(3) $y=x\cos x$;　　(4) $y=e^{-t}\sin t$;

(5) $y=\sqrt{a^2-x^2}$;　　(6) $y=\ln(1-x^2)$;

(7) $y=\tan x$;　　(8) $y=\dfrac{1}{x^3+1}$;

(9) $y=(1+x^2)\arctan x$;　　(10) $y=\dfrac{e^x}{x}$;

(11) $y=xe^{x^2}$;　　(12) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解　(1) $y'=4x+\dfrac{1}{x}, y''=4-\dfrac{1}{x^2}$.

(2) $y'=e^{2x-1}\cdot 2=2e^{2x-1}, y''=2e^{2x-1}\cdot 2=4e^{2x-1}$.

(3) $y'=\cos x+x(-\sin x)=\cos x-x\sin x$,

$y''=-\sin x-\sin x-x\cos x=-2\sin x-x\cos x$.

(4) $y'=e^{-t}(-1)\sin t+e^{-t}\cos t=e^{-t}(\cos t-\sin t)$,

$y''=e^{-t}(-1)(\cos t-\sin t)+e^{-t}(-\sin t-\cos t)$

$=e^{-t}(-2\cos t)=-2e^{-t}\cos t$.

(5) $y'=\dfrac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}=-\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$,

$$y''=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}-x\cdot\dfrac{(-2x)}{2\sqrt{a^2-x^2}}}{(\sqrt{a^2-x^2})^2}=\frac{-a^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}.$$

(6) $y'=\dfrac{1}{1-x^2}\cdot(-2x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$,

$$y''=\frac{2(x^2-1)-2x\cdot(2x)}{(x^2-1)^2}=-\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}.$$

(7) $y'=\sec^2 x, y''=2\sec^2 x\tan x$.

(8) $y'=\dfrac{-3x^2}{(x^3+1)^2}$,

$$y''=-\frac{3[2x(x^3+1)^2-x^2\cdot 2(x^3+1)\cdot 3x^2]}{(x^3+1)^4}=\frac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}.$$

(9) $y'=2x\arctan x+(1+x^2)\cdot\dfrac{1}{1+x^2}=2x\arctan x+1$,

$$y''=2\arctan x+2x\frac{1}{1+x^2}=2\arctan x+\frac{2x}{1+x^2}.$$

(10) $y'=\dfrac{xe^x-e^x}{x^2}=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$,

$$y''=\frac{(e^x+(x-1)e^x)x^2-2x(x-1)e^x}{x^4}=\frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}.$$

(11) $y' = e^{x^2} + xe^{x^2} \cdot 2x = (1+2x^2)e^{x^2}$,

$y'' = 4xe^{x^2} + (1+2x^2)e^{x^2} \cdot 2x = 2x(3+2x^2)e^{x^2}$.

(12) $y' = \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

$$y'' = \frac{-\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{(\sqrt{1+x^2})^2} = -\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

2. 设 $f(x)=(x+10)^6$, $f'''(2)=?$

解　$f'(x)=6(x+10)^5$, $f''(x)=30(x+10)^4$, $f'''(x)=120(x+10)^3$,

$f'''(2)=120\times 12^3=207\,360$.

3. 设 $f''(x)$ 存在,求下列函数的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

(1) $y=f(x^2)$;　　(2) $y=\ln[f(x)]$.

解　(1) $y'=f'(x^2)\cdot 2x=2xf'(x^2)$,

$$y''=2f'(x^2)+2xf''(x^2)\cdot 2x$$
$$=2f'(x^2)+4x^2f''(x^2).$$

(2) $y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, $y''=\dfrac{f''(x)f(x)-f'^2(x)}{f^2(x)}$.

4. 试从 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y'}$ 导出:

(1) $\dfrac{d^2x}{dy^2}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$;　　(2) $\dfrac{d^3x}{dy^3}=\dfrac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$.

解　(1) $\dfrac{d^2x}{dy^2}=\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{dx}{dy}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{y'}\right)\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{y''}{(y')^2}\cdot\dfrac{1}{y'}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$.

(2) $\dfrac{d^3x}{dy^3}=\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{d^2x}{dy^2}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{-y''}{(y')^3}\right)\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{y'''(y')^3-y''\cdot 3(y')^2y''}{(y')^6}\cdot\dfrac{1}{y'}$

$=\dfrac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$.

5. 已知物体的运动规律为 $s=A\sin\omega t$(A,ω 是常数),求物体运动的加速度,并验证:

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\omega^2 s=0.$$

解　$\dfrac{ds}{dt}=A\cos\omega t\cdot\omega=A\omega\cos\omega t$, $\dfrac{d^2s}{dt^2}=-A\omega^2\sin\omega t$,

故

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\omega^2 s=-A\omega^2\sin\omega t+\omega^2A\sin\omega t=0.$$

6. 密度大的陨星进入大气层时,当它离地心为 s km 时的速度与 $\sqrt{s}$ 成反比. 试证陨星

的加速度 a 与 s^2 成反比.

证　由题意知 $v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{k}{\sqrt{s}}$,其中 k 为比例系数,则

$$a=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{k}{\sqrt{s}}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{s^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{k}{\sqrt{s}}=-\frac{k^2}{2s^2},$$

即陨星的加速度与 s^2 成反比.

7. 假设质点沿 x 轴运动的速度为$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x)$,试求质点运动的加速度.

解　质点运动的加速度为

$$a=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f'(x)f(x).$$

8. 验证函数 $y=C_1\mathrm{e}^{\lambda x}+C_2\mathrm{e}^{-\lambda x}$($\lambda,C_1,C_2$ 是常数)满足关系式

$$y''-\lambda^2y=0.$$

解　$$y'=C_1\lambda\mathrm{e}^{\lambda x}-C_2\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x},y''=C_1\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda x}+C_2\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda x},$$

故

$$y''-\lambda^2y=C_1\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda x}+C_2\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda x}-\lambda^2(C_1\mathrm{e}^{\lambda x}+C_2\mathrm{e}^{-\lambda x})=0.$$

9. 验证函数 $y=\mathrm{e}^x\sin x$ 满足关系式

$$y''-2y'+2y=0.$$

解　$y'=\mathrm{e}^x\sin x+\mathrm{e}^x\cos x=\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x)$,

$y''=\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x)+\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)=2\mathrm{e}^x\cos x$,

故

$$y''-2y'+2y=2\mathrm{e}^x\cos x-2\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x)+2\mathrm{e}^x\sin x=0.$$

10. 求下列函数所指定的阶的导数:

(1) $y=\mathrm{e}^x\cos x$,求 $y^{(4)}$;　　(2) $y=x^2\sin 2x$,求 $y^{(50)}$.

解　(1) 利用莱布尼茨公式 $(uv)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$,其中,$\mathrm{C}_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$.

$$(\mathrm{e}^x\cos x)^{(4)}=(\mathrm{e}^x)^{(4)}\cos x+4(\mathrm{e}^x)'''(\cos x)'+\frac{4\cdot 3}{2!}(\mathrm{e}^x)''(\cos x)''+$$
$$\frac{4\cdot 3\cdot 2}{3!}(\mathrm{e}^x)'(\cos x)'''+\mathrm{e}^x(\cos x)^{(4)}$$
$$=\mathrm{e}^x\cos x-4\mathrm{e}^x\sin x+6\mathrm{e}^x(-\cos x)+4\mathrm{e}^x\sin x+\mathrm{e}^x\cos x$$
$$=-4\mathrm{e}^x\cos x.$$

(2) 由 $(\sin 2x)^{(n)}=2^n\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$及莱布尼茨公式得

$$(x^2\sin 2x)^{(50)}=x^2(\sin 2x)^{(50)}+50(x^2)'(\sin 2x)^{(49)}+\frac{50\cdot 49}{2!}(x^2)''(\sin 2x)^{(48)}$$

$$=2^{50}x^2\sin\left(2x+\frac{50\pi}{2}\right)+100\cdot 2^{49}x\sin\left(2x+\frac{49\pi}{2}\right)+$$

$$\frac{50\cdot 49}{2}\cdot 2\cdot 2^{48}\sin\left(2x+\frac{48\pi}{2}\right)$$

$$=2^{50}\left(-x^2\sin 2x+50x\cos 2x+\frac{1\ 225}{2}\sin 2x\right).$$

*11. 求下列函数的 n 阶导数的一般表达式：

(1) $y=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ ($a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是常数)；

(2) $y=\sin^2 x$； (3) $y=x\ln x$； (4) $y=xe^x$.

解 (1) $y'=nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+a_2(n-2)x^{n-3}+\cdots+a_{n-1}$,

$y''=n(n-1)x^{n-2}+a_1(n-1)(n-2)x^{n-3}+\cdots+a_{n-2}$,

……

$y^{(n)}=n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1=n!$.

(2) $y=\sin^2 x=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$,

$$y^{(n)}=\frac{-1}{2}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)\cdot 2^n$$

$$=-2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

(3) $y'=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln x+1,\ y''=\dfrac{1}{x}$,

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{x^{n-1}}\ (n\geqslant 2).$$

(4) $y'=e^x+xe^x=(1+x)e^x,\ y''=e^x+(1+x)e^x=(2+x)e^x$.

设 $y^{(k)}=(k+x)e^x$,则 $y^{(k+1)}=e^x+(k+x)e^x=(1+k+x)e^x$,故 $y^{(n)}=(n+x)e^x$.

*12. 求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)$ ($n\geqslant 3$).

解 本题可用莱布尼茨公式求解.

设 $u=\ln(1+x),\ v=x^2$,则 $u^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ ($n=1,2,\cdots$), $v'=2x,\ v''=2,\ v^{(k)}=0$ ($k\geqslant 3$). 故由莱布尼茨公式,得

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}\cdot x^2+n\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}\cdot 2x+$$

$$\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}\cdot 2\quad(n\geqslant 3)$$

$$f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}(n\geqslant 3).$$

习题 2－4　隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 相关变化率

1. 求由下列方程所确定的隐函数的导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

(1) $y^2-2xy+9=0$;　　(2) $x^3+y^3-3axy=0$;

(3) $xy=\mathrm{e}^{x+y}$;　　(4) $y=1-x\mathrm{e}^y$.

解　(1) 在方程两端分别对 x 求导,得

$$2yy'-2y-2xy'=0,$$

从而 $y'=\frac{y}{y-x}$,其中 $y=y(x)$ 是由方程 $y^2-2xy+9=0$ 所确定的隐函数.

(2) 在方程两端分别对 x 求导,得

$$3x^2+3y^2y'-3ay-3axy'=0,$$

从而 $y'=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$,其中 $y=y(x)$ 是由方程 $x^3+y^3-3axy=0$ 所确定的隐函数.

(3) 在方程两端分别对 x 求导,得

$$y+xy'=\mathrm{e}^{x+y}(1+y'),$$

从而 $y'=\frac{\mathrm{e}^{x+y}-y}{x-\mathrm{e}^{x+y}}$,其中 $y=y(x)$ 是由方程 $xy=\mathrm{e}^{x+y}$ 所确定的隐函数.

(4) 在方程两端分别对 x 求导,得

$$y'=-\mathrm{e}^y-x\mathrm{e}^yy',$$

从而,$y'=-\frac{\mathrm{e}^y}{1+x\mathrm{e}^y}$,其中 $y=y(x)$ 是由方程 $y=1-x\mathrm{e}^y$ 所确定的隐函数.

2. 求曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 在点$\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)$处的切线方程和法线方程.

解　由导数的几何意义知,所求切线的斜率为

$$k=y'\big|_{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)},$$

在曲线方程两端分别对 x 求导,得

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'=0,$$

从而,$y'=-\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}}$,　$y'\big|_{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)}=-1$.

于是所求的切线方程为

$$y-\frac{\sqrt{2}}{4}a=-1\left(x-\frac{\sqrt{2}}{4}a\right),$$

即 $x+y=\frac{\sqrt{2}}{2}a$. 法线方程为

$$y-\frac{\sqrt{2}}{4}a=1\cdot\left(x-\frac{\sqrt{2}}{4}a\right),$$

即 $x-y=0$.

3. 求由下列方程所确定的隐函数的二阶导数$\frac{d^2y}{dx^2}$:

(1) $x^2-y^2=1$;　　(2) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$;

(3) $y=\tan(x+y)$;　　(4) $y=1+xe^y$.

解　(1) 应用隐函数的求导方法,得

$$2x-2yy'=0,$$

于是,$y'=\frac{x}{y}$.

在上式两端再对 x 求导,得

$$y''=\frac{y-xy'}{y^2}=\frac{y-\frac{x^2}{y}}{y^2}=\frac{y^2-x^2}{y^3}=-\frac{1}{y^3}.$$

(2) 应用隐函数的求导方法,得

$$2xb^2+2a^2yy'=0,$$

于是

$$y'=-\frac{b^2x}{a^2y},$$

$$y''=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y-xy'}{y^2}=-\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

(3) 应用隐函数的求导方法,得

$$y'=\sec^2(x+y)(1+y')=[1+\tan^2(x+y)](1+y')=(1+y^2)(1+y'),$$

于是

$$y'=\frac{(1+y^2)}{1-(1+y^2)}=-\frac{1}{y^2}-1,$$

$$y''=\frac{2y'}{y^3}=-\frac{2(1+y^2)}{y^5}=-2\csc^2(x+y)\cot^3(x+y).$$

(4) 应用隐函数的求导方法,得

$$y'=e^y+xe^yy',$$

于是

$$y'=\frac{e^y}{1-xe^y},$$

$$y''=\frac{e^y\cdot y'(1-xe^y)-e^y(-e^y-xe^yy')}{(1-xe^y)^2}$$

$$=\frac{e^y y'+e^{2y}}{(1-xe^y)^2}=\frac{e^{2y}(2-xe^y)}{(1-xe^y)^3}.$$

4. 用对数求导法求下列函数的导数：

(1) $y=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$；　　(2) $y=\sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}$；

(3) $y=\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$；　　(4) $y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$.

解 (1) 在 $y=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$ 两端取对数，得

$$\ln y=x[\ln x-\ln(1+x)].$$

在上式两端分别对 x 求导，并注意到 $y=y(x)$，得

$$\frac{y'}{y}=[\ln x-\ln(1+x)]+x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)=\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x},$$

于是

$$y'=y\left(\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}\right)=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x\left(\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}\right).$$

(2) 在 $y=\sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}$ 两端取对数，得

$$\ln y=\frac{1}{5}\left[\ln(x-5)-\frac{1}{5}\ln(x^2+2)\right]=\frac{1}{5}\ln(x-5)-\frac{1}{25}\ln(x^2+2).$$

在上式两端分别对 x 求导，并注意到 $y=y(x)$，得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-5}-\frac{1}{25}\cdot\frac{2x}{x^2+2},$$

于是

$$y'=y\left[\frac{1}{5(x-5)}-\frac{2x}{25(x^2+2)}\right]=\sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}\left[\frac{1}{5(x-5)}-\frac{2x}{25(x^2+2)}\right].$$

(3) 在 $y=\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$ 两端取对数，得

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln(x+2)+4\ln(3-x)-5\ln(1+x).$$

在上式两端分别对 x 求导，并注意到 $y=y(x)$，得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+2}+4\cdot\frac{(-1)}{3-x}-5\cdot\frac{1}{1+x},$$

于是

$$y'=y\left[\frac{1}{2(x+2)}-\frac{4}{3-x}-\frac{5}{1+x}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}\left[\frac{1}{2(x+2)} - \frac{4}{3-x} - \frac{5}{1+x}\right].$$

(4) 在 $y = \sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$ 两端取对数,得

$$\ln y = \frac{1}{2}\left[\ln x + \ln\sin x + \frac{1}{2}\ln(1-e^x)\right].$$

在上式两端分别对 x 求导,并注意到 $y = y(x)$,得

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x} + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(-e^x)}{1-e^x}\right],$$

于是

$$y' = y\left[\frac{1}{2x} + \frac{\cos x}{2\sin x} - \frac{e^x}{4(1-e^x)}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}\left[\frac{1}{x} + \cot x - \frac{e^x}{2(1-e^x)}\right].$$

5. 求下列参数方程所确定的函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$:

(1) $\begin{cases} x = at^2, \\ y = bt^3; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x = \theta(1-\sin\theta), \\ y = \theta\cos\theta. \end{cases}$

解 (1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{3bt^2}{2at} = \dfrac{3b}{2a}t.$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \dfrac{\cos\theta - \theta\sin\theta}{1-\sin\theta+\theta(-\cos\theta)} = \dfrac{\cos\theta-\theta\sin\theta}{1-\sin\theta-\theta\cos\theta}.$

6. 已知 $\begin{cases} x = e^t\sin t, \\ y = e^t\cos t, \end{cases}$ 求当 $t = \dfrac{\pi}{3}$ 时 $\dfrac{dy}{dx}$ 的值.

解

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t\cos t - e^t\sin t}{e^t\sin t + e^t\cos t} = \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t},$$

于是

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{3} - 2.$$

7. 写出下列曲线在所给参数值相应的点处的切线方程和法线方程:

(1) $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos 2t, \end{cases}$ 在 $t = \dfrac{\pi}{4}$ 处;

(2) $\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^2}, \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^2}, \end{cases}$ 在 $t=2$ 处.

解 (1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{-2\sin 2t}{\cos t}=-4\sin t,$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-2\sqrt{2}.$$

$t=\dfrac{\pi}{4}$对应点$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)$,曲线在点$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)$处的切线方程为

$$y-0=-2\sqrt{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

即 $2\sqrt{2}x+y-2=0$. 法线方程为

$$y-0=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

即$\sqrt{2}x-4y-1=0$.

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{\left(\dfrac{3at^2}{1+t^2}\right)'}{\left(\dfrac{3at}{1+t^2}\right)'}=\dfrac{\dfrac{3a[2t(1+t^2)-t^2\cdot 2t]}{(1+t^2)^2}}{\dfrac{3a[(1+t^2)-t\cdot 2t]}{(1+t^2)^2}}$

$=\dfrac{2t}{1-t^2},$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=2}=-\frac{4}{3},$$

$t=2$ 对应点$\left(\dfrac{6}{5}a,\dfrac{12}{5}a\right)$. 曲线在点$\left(\dfrac{6}{5}a,\dfrac{12}{5}a\right)$处的切线方程为

$$y-\frac{12}{5}a=-\frac{4}{3}\left(x-\frac{6}{5}a\right),$$

即 $4x+3y-12a=0$. 法线方程为

$$y-\frac{12}{5}a=\frac{3}{4}\left(x-\frac{6}{5}a\right),$$

即 $3x-4y+6a=0$.

8. 求下列参数方程所确定的函数的二阶导数$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$:

(1) $\begin{cases} x=\dfrac{t^2}{2}, \\ y=1-t; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t; \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x=3\mathrm{e}^{-t}, \\ y=2\mathrm{e}^{t}; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x=f'(t), \\ y=tf'(t)-f(t), \end{cases}$ 设 $f''(t)$ 存在且不为零.

解 (1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{-1}{t}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\frac{1}{t^2}}{t}=\dfrac{1}{t^3}$.

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{b\cos t}{-a\sin t}=-\dfrac{b}{a}\cot t$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{b}{a}(-\csc^2 t)}{-a\sin t}=\frac{-b}{a^2\sin^3 t}.$$

(3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2e^t}{-3e^{-t}}=-\dfrac{2}{3}e^{2t}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{-\frac{4}{3}e^{2t}}{-3e^{-t}}=\dfrac{4}{9}e^{3t}$.

(4) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{f'(t)+tf''(t)-f'(t)}{f''(t)}=t$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{f''(t)}$.

*9. 求下列参数方程所确定的函数的三阶导数 $\dfrac{d^3y}{dx^3}$:

(1) $\begin{cases} x=1-t^2, \\ y=t-t^3; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=t-\arctan t. \end{cases}$

解 (1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-3t^2}{-2t}=-\dfrac{1}{2t}+\dfrac{3}{2}t$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{1}{2t^2}+\frac{3}{2}}{-2t}=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t^3}+\frac{3}{t}\right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{-\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{t^4}-\frac{3}{t^2}\right)}{-2t}=-\frac{3}{8t^5}(1+t^2).$$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{t}{2}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{4t}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t}+t\right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{t^2}+1\right)}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t^4-1}{8t^3}.$$

10. 落在平静水面上的石头，产生同心波纹. 若最外一圈波半径的增大速率总是 6 m/s，问在 2 s 末扰动水面面积增大的速率为多少？

解　设最外一圈波的半径为 $r=r(t)$，圆的面积 $S=S(t)$. 在 $S=\pi r^2$ 两端分别对 t 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=2\pi r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}.$$

当 $t=2$ 时，$r=6\times 2=12$，$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=6$，代入上式得

$$\left.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right|_{t=2}=2\pi\cdot 12\cdot 6=144\pi(\mathrm{m}^2/\mathrm{s}).$$

11. 注水入深 8 m、上顶直径 8 m 的正圆锥形容器中，其速率为 4 m³/min. 当水深为 5 m 时，其表面上升的速率为多少？

解　如图 2－1 所示，设在 t 时刻容器中的水深为 $h(t)$，水的容积为 $V(t)$，因为 $\frac{r}{4}=\frac{h}{8}$，即 $r=\frac{h}{2}$，所以

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h=\frac{\pi}{12}h^3,$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\pi}{4}h^2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t},\quad \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\frac{4}{\pi h^2}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}.$$

故

$$\left.\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right|_{h=5}=\frac{4}{25\pi}\cdot 4=\frac{16}{25\pi}\approx 0.204(\mathrm{m}/\mathrm{min}).$$

12. 溶液自深 18 cm、顶直径 12 cm 的正圆锥形漏斗中漏入一直径为 10 cm 的圆柱形筒中. 开始时漏斗中盛满了溶液. 已知当溶液在漏斗中深为 12 cm 时，其表面下降的速率为 1 cm/min. 问此时圆柱形筒中溶液表面上升的速率为多少？

解　如图 2－2，设在 t 时刻漏斗中的溶液深为 $H=H(t)$，圆柱形筒中溶液深为 $h=h(t)$.

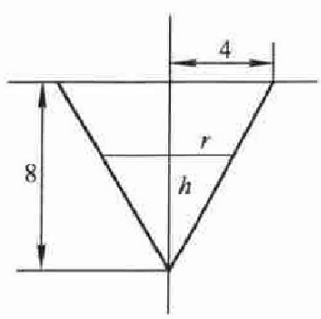


图 2－1

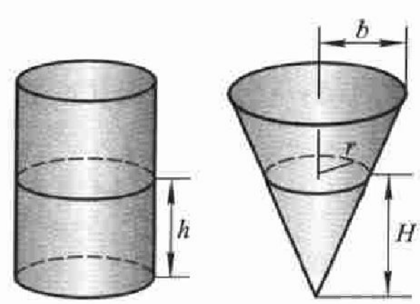


图 2－2

建立 h 与 H 之间的关系：

$$\frac{1}{3}\pi 6^2\cdot 18-\frac{1}{3}\pi r^2 H=\pi 5^2 h.$$

又，$\frac{r}{6}=\frac{H}{18}$，即 $r=\frac{H}{3}$. 故

$$\frac{1}{3}\pi 6^2 \cdot 18-\frac{1}{3}\pi\left(\frac{H}{3}\right)^2 H=\pi 5^2 h,$$

即 $216\pi-\frac{\pi}{27}H^3=25\pi h.$

上式两端分别对 t 求导，得

$$-\frac{3}{27}\pi H^2\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=25\pi\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}.$$

当 $H=12$ 时，$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=-1$，此时

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{25\pi}\left(-\frac{3}{27}\pi H^2\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\right)\Bigg|_{\substack{H=12\\ \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=-1}}=\frac{16}{25}\approx 0.64\ (\mathrm{cm/min}).$$

习题 2-5 函数的微分

1. 已知 $y=x^3-x$，计算在 $x=2$ 处当 Δx 分别等于 1，0.1，0.01 时的 Δy 及 $\mathrm{d}y$.

解 $\Delta y=(x+\Delta x)^3-(x+\Delta x)-x^3+x$

$=3x(\Delta x)^2+3x^2\Delta x+(\Delta x)^3-\Delta x,$

$\mathrm{d}y=(3x^2-1)\Delta x.$

于是

$\Delta y\big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=1}}=6\cdot 1+3\cdot 4+1^3-1=18,\ \mathrm{d}y\big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=1}}=11\cdot 1=11;$

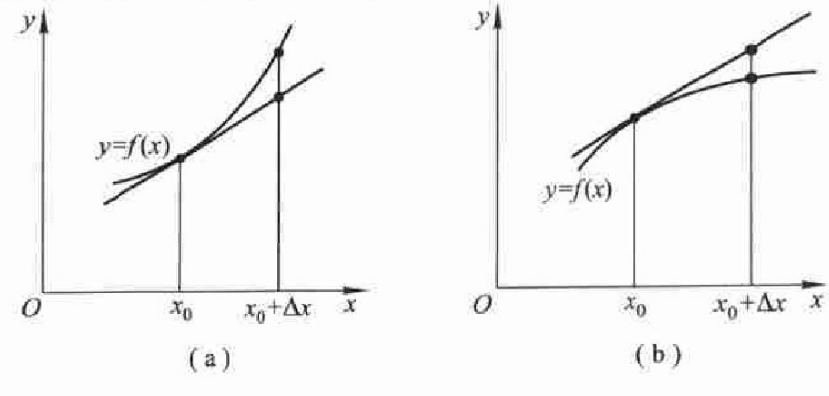
$\Delta y\big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.1}}=6\cdot(0.1)^2+12\cdot(0.1)+(0.1)^3-0.1=1.161,$

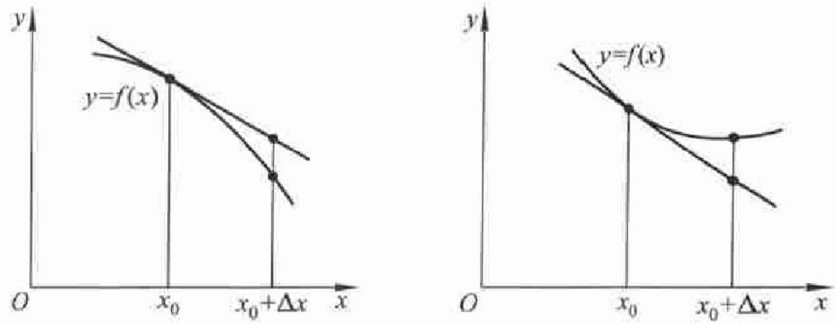
$\mathrm{d}y\big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.1}}=11\cdot(0.1)=1.1;$

$\Delta y\big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.01}}=6\cdot(0.01)^2+12\cdot(0.01)+(0.01)^3-0.01=0.110\,601,$

$\mathrm{d}y\big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.01}}=11\cdot(0.01)=0.11.$

2. 设函数 $y=f(x)$ 的图形如图 2-3，试在图 2-3(a)、(b)、(c)、(d)中分别标出在点 x_0 的 $\mathrm{d}y$、Δy 及 $\Delta y-\mathrm{d}y$，并说明其正负.





(c)　　　　　　(d)

图 2－3

解　(a) $\Delta y>0, \mathrm{d}y>0, \Delta y-\mathrm{d}y>0$.

(b) $\Delta y>0, \mathrm{d}y>0, \Delta y-\mathrm{d}y<0$.

(c) $\Delta y<0, \mathrm{d}y<0, \Delta y-\mathrm{d}y<0$.

(d) $\Delta y<0, \mathrm{d}y<0, \Delta y-\mathrm{d}y>0$.

3. 求下列函数的微分：

(1) $y=\dfrac{1}{x}+2\sqrt{x}$;　　(2) $y=x\sin 2x$;

(3) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;　　(4) $y=\ln^2(1-x)$;

(5) $y=x^2\mathrm{e}^{2x}$;　　(6) $y=\mathrm{e}^{-x}\cos(3-x)$;

(7) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$;　　(8) $y=\tan^2(1+2x^2)$;

(9) $y=\arctan\dfrac{1-x^2}{1+x}$;　　(10) $s=A\sin(\omega t+\varphi)$　(A,ω,φ 是常数).

解　(1) $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\left(-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$.

(2) $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=(\sin 2x+x\cos 2x\cdot 2)\mathrm{d}x=(\sin 2x+2x\cos 2x)\mathrm{d}x$.

(3) $$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{x^2+1}-x\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{(\sqrt{x^2+1})^2}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{3/2}}.$$

(4) $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=2\ln(1-x)\cdot\dfrac{(-1)}{1-x}\mathrm{d}x=\dfrac{2}{x-1}\ln(1-x)\mathrm{d}x$.

(5) $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=(2x\mathrm{e}^{2x}+x^2\mathrm{e}^{2x}\cdot 2)\mathrm{d}x=2x(1+x)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$.

(6) $$\begin{aligned}\mathrm{d}y&=y'\mathrm{d}x=[-\mathrm{e}^{-x}\cos(3-x)+\mathrm{e}^{-x}\sin(3-x)]\mathrm{d}x\\&=\mathrm{e}^{-x}[\sin(3-x)-\cos(3-x)]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(7) $$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}}\cdot\frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}\right]\mathrm{d}x=-\frac{x}{|x|}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}, & -1<x<0,\\ -\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}, & 0<x<1.\end{cases}$$

(8) $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=[2\tan(1+2x^2)\cdot\sec^2(1+2x^2)\cdot 4x]\mathrm{d}x$
$=8x\tan(1+2x^2)\sec^2(1+2x^2)\mathrm{d}x.$

(9) $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}\cdot\dfrac{(-2x)(1+x^2)-(1-x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$

$=-\dfrac{2x}{1+x^4}\mathrm{d}x.$

(10) $\mathrm{d}s=s'\mathrm{d}t=[A\cos(\omega t+\varphi)\cdot\omega]\mathrm{d}t=A\omega\cos(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t.$

4. 将适当的函数填入下列括号内,使等式成立:

(1) $\mathrm{d}(\quad)=2\mathrm{d}x$;　(2) $\mathrm{d}(\quad)=3x\mathrm{d}x$;

(3) $\mathrm{d}(\quad)=\cos t\mathrm{d}t$;　(4) $\mathrm{d}(\quad)=\sin\omega x\mathrm{d}x$;

(5) $\mathrm{d}(\quad)=\dfrac{1}{1+x}\mathrm{d}x$;　(6) $\mathrm{d}(\quad)=\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$;

(7) $\mathrm{d}(\quad)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;　(8) $\mathrm{d}(\quad)=\sec^2 3x\mathrm{d}x$.

解　(1) $\mathrm{d}(2x+C)=2\mathrm{d}x.$

(2) $\mathrm{d}\left(\dfrac{3}{2}x^2+C\right)=3x\mathrm{d}x.$

(3) $\mathrm{d}(\sin t+C)=\cos t\mathrm{d}t.$

(4) $\mathrm{d}\left(-\dfrac{1}{\omega}\cos\omega x+C\right)=\sin\omega x\mathrm{d}x.$

(5) $\mathrm{d}(\ln(1+x)+C)=\dfrac{1}{1+x}\mathrm{d}x.$

(6) $\mathrm{d}\left(-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}+C\right)=\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x.$

(7) $\mathrm{d}(2\sqrt{x}+C)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$

(8) $\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{3}\tan 3x+C\right)=\sec^2 3x\mathrm{d}x.$

上述 C 均为任意常数.

5. 如图 2-4 所示的电缆$\widehat{AOB}$的长为 s,跨度为 $2l$,电缆的最低点 O 与杆顶连线 AB 的距离为 f,则电缆长可按下面公式计算:

$$s=2l\left(1+\frac{2f^2}{3l^2}\right),$$

当 f 变化了 Δf 时,电缆长的变化约为多少?

解　$s=2l\left(1+\dfrac{2f^2}{3l^2}\right)$, $\Delta s\approx \mathrm{d}s=2l\cdot\dfrac{4f}{3l^2}\Delta f=\dfrac{8f}{3l}\Delta f.$

6. 设扇形的圆心角 $\alpha=60°$,半径 $R=100\,\mathrm{cm}$(图 2-5). 如果 R 不变,α 减少 $30'$,问扇形面积大约改变了多少? 又如果 α 不变,R 增加 1 cm,问扇形面积大约改变了多少?

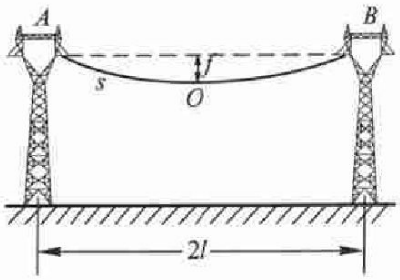


图 2-4

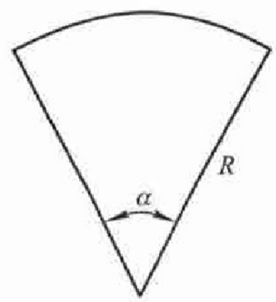


图 2-5

解　扇形面积公式为 $S=\dfrac{R^2}{2}\alpha$. 于是

$$\Delta S\approx \mathrm{d}S=\frac{R^2}{2}\Delta\alpha.$$

将 $R=100$, $\Delta\alpha=-30'=-\dfrac{\pi}{360}$, $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ 代入上式得

$$\Delta S\approx\frac{1}{2}\cdot 100^2\cdot\left(-\frac{\pi}{360}\right)\approx -43.63\ \mathrm{cm}^2.$$

又

$$\Delta S\approx \mathrm{d}S\approx \alpha R\Delta R,$$

将 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$, $R=100$, $\Delta R=1$ 代入上式得

$$\Delta S\approx\frac{\pi}{3}\cdot 100\cdot 1\approx 104.72\ \mathrm{cm}^2.$$

7. 计算下列三角函数值的近似值:

(1) $\cos 29°$;　　(2) $\tan 136°$.

解　(1) 由 $\cos x\approx\cos x_0+(\cos x)'|_{x=x_0}\cdot(x-x_0)$,取 $x_0=30°=\dfrac{\pi}{6}$ 得

$$\cos 29°=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{180}\right)\approx\cos\frac{\pi}{6}+(-\sin x)|_{x=\frac{\pi}{6}}\cdot\left(-\frac{\pi}{180}\right)$$

$$\approx\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{360}\approx 0.87475.$$

(2) 由 $\tan x\approx\tan x_0+(\tan x)'|_{x=x_0}\cdot(x-x_0)$,取 $x_0=\dfrac{3}{4}\pi$ 得

$$\tan 136° \approx \tan\frac{3}{4}\pi + \sec^2 x|_{x=\frac{3}{4}\pi}\cdot\frac{\pi}{180} \approx -0.96509.$$

8. 计算下列反三角函数值的近似值：

(1) $\arcsin 0.5002$； (2) $\arccos 0.4995$.

解 (1) 由 $\arcsin x \approx \arcsin x_0 + (\arcsin x)'|_{x=x_0}\cdot(x-x_0)$，取 $x_0=0.5$ 得

$$\arcsin 0.5002 \approx \arcsin 0.5 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\bigg|_{x=0.5}\cdot 0.0002$$

$$\approx 30°47''.$$

(2) 由 $\arccos x \approx \arccos x_0 + (\arccos x)'\Big|_{x=x_0}\cdot(x-x_0)$，取 $x_0=0.5$ 得

$$\arccos 0.4995 \approx \arccos 0.5 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\bigg|_{x=0.5}\cdot(-0.0005)$$

$$\approx 60°2'.$$

9. 当 $|x|$ 较小时，证明下列近似公式：

(1) $\tan x \approx x$（x 是角的弧度值）； (2) $\ln(1+x)\approx x$；

(3) $\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x$； (4) $e^x\approx 1+x$.

并计算 $\tan 45'$ 和 $\ln 1.002$ 的近似值.

解 (1) $\tan x \approx \tan 0 + (\tan x)'\Big|_{x=0}\cdot x = 0 + \sec^2 0\cdot x = x.$

(2) $\ln(1+x)\approx \ln(1+0) + [\ln(1+x)]'\Big|_{x=0}\cdot x = 0 + \frac{1}{1+0}x = x.$

(3) $\sqrt[n]{1+x}\approx \sqrt[n]{1+0} + (\sqrt[n]{1+x})'|_{x=0}\cdot x = 1 + \frac{1}{n}(1+0)^{\frac{1}{n}-1}\cdot x = 1+\frac{1}{n}x.$

(4) $e^x \approx e^0 + (e^x)'|_{x=0}\cdot x = 1 + e^0 x = 1 + x.$

$\tan 45' = \tan 0.01309 \approx 0.01309$，$\ln(1.002)\approx 0.002$.

10. 计算下列各根式的近似值：

(1) $\sqrt[3]{996}$； (2) $\sqrt[6]{65}$.

解 由 $\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{x}{n}$ 知

(1) $\sqrt[3]{996} = \sqrt[3]{1000-4} = 10\sqrt[3]{1-\frac{4}{1000}} \approx 10\left[1+\frac{1}{3}\left(-\frac{4}{1000}\right)\right]\approx 9.987.$

(2) $\sqrt[6]{65} = \sqrt[6]{64+1} = 2\sqrt[6]{1+\frac{1}{64}} \approx 2\left(1+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{64}\right)\approx 2.0052.$

***11.** 计算球体体积时，要求精确度在 2% 以内. 问这时测量直径 D 的相对误差不能超过多少?

解 由 $V=\frac{1}{6}\pi D^3$ 知

$$\mathrm{d}V=\frac{\pi}{2}D^2\Delta D,$$

于是由 $\left|\frac{\mathrm{d}V}{V}\right|=\left|\frac{\frac{\pi}{2}D^2\Delta D}{\frac{1}{6}\pi D^3}\right|=3\left|\frac{\Delta D}{D}\right|\leqslant 2\%$，知

$$\left|\frac{\Delta D}{D}\right|\leqslant\frac{0.02}{3}\approx 0.667\%.$$

* **12.** 某厂生产如图 2－6 所示的扇形板，半径 $R=200$ mm，要求中心角 α 为 $55°$. 产品检验时，一般用测量弦长 l 的办法来间接测量中心角 α. 如果测量弦长 l 时的误差 $\delta_l=0.1$ mm，问由此而引起的中心角测量误差 δ_α 是多少？

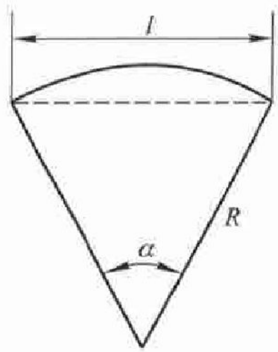


图 2－6

解 如图 2－6，由 $\frac{l}{2}=R\sin\frac{\alpha}{2}$ 得

$$\alpha=2\arcsin\frac{l}{2R}=2\arcsin\frac{l}{400},$$

故

$$\delta_\alpha=|\alpha_l'|\delta_l=\frac{2}{\sqrt{1-\left(\frac{l}{400}\right)^2}}\cdot\frac{1}{400}\cdot\delta_l.$$

当 $\alpha=55°$ 时，$l=2R\sin\frac{\alpha}{2}=400\sin(27.5°)\approx 184.7$. 将 $l\approx 184.7$，$\delta_l=0.1$ 代入上式得

$$\delta_\alpha\approx\frac{2}{\sqrt{1-\left(\frac{184.7}{400}\right)^2}}\cdot\frac{1}{400}\cdot 0.1\approx 0.00056(\text{弧度})=1'55''.$$

总习题二

1. 在“充分”“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内：

(1) $f(x)$ 在点 x_0 可导是 $f(x)$ 在点 x_0 连续的________条件. $f(x)$ 在点 x_0 连续是

$f(x)$在点 x_0 可导的________条件.

(2) $f(x)$在点 x_0 的左导数 $f'_-(x_0)$ 及右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等是$f(x)$在点 x_0 可导的________条件.

(3) $f(x)$在点 x_0 可导是$f(x)$在点 x_0 可微的________条件.

解 (1) 充分,必要.

(2) 充分必要.

(3) 充分必要.

2. 设$f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)\ (n\geqslant 2)$,则$f'(0)=$________.

解 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}[(x+1)(x+2)\cdots(x+n)]=n!$.

3. 下述题中给出了四个结论,从中选出一个正确的结论:

设$f(x)$在 $x=a$ 的某个邻域内有定义,则$f(x)$在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是(　　).

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty}h\left[f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)\right]$存在

(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$存在

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$存在

(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$存在

解 由 $\lim\limits_{h\to+\infty}h\left[f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)\right]=\lim\limits_{h\to+\infty}\dfrac{f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)}{\dfrac{1}{h}}$存在,仅可知$f'_+(a)$存在,故不能选(A).

取$f(x)=\begin{cases}1, x\neq 0,\\ 0, x=0.\end{cases}$显然,$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+2h)-f(0+h)}{h}=0$,但$f(x)$在 $x=0$ 处不可导,故不能选(B).

取$f(x)=|x|$,显然,$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0-h)}{2h}=0$. 但$f(x)$在 $x=0$ 处不可导,故不能选(C).

而 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}=\lim\limits_{-h\to 0}\dfrac{f(a+(-h))-f(a)}{-h}$ 存在,按导数定义知$f'(a)$存在,故选择(D).

4. 设有一根细棒,取棒的一端作为原点,棒上任意点的坐标为 x,于是分布在区间$[0,x]$上细棒的质量 m 是 x 的函数 $m=m(x)$. 应怎样确定细棒在点 x_0 处的线密度(对于均匀细棒来说,单位长度细棒的质量叫做这细棒的线密度)?

解 在区间$[x_0, x_0+\Delta x]$上的平均线密度为

$$\bar{\rho}=\frac{\Delta m}{\Delta x}=\frac{m(x_0+\Delta x)-m(x_0)}{\Delta x}.$$

在点x_0处的线密度为

$$\rho(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{m(x_0+\Delta x)-m(x_0)}{\Delta x}=\left.\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}.$$

5. 根据导数的定义,求$f(x)=\dfrac{1}{x}$的导数.

解 由导数的定义知,当$x\neq 0$时,

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x+\Delta x}-\dfrac{1}{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x(x+\Delta x)}=-\frac{1}{x^2}.$$

6. 求下列函数$f(x)$的$f'_-(0)$及$f'_+(0)$,又$f'(0)$是否存在:

(1) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ \ln(1+x), & x\geqslant 0;\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解 (1) $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x}=1,$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

由$f'_-(0)=f'_+(0)=1$知$f'(0)=f'_-(0)=f'_+(0)=1$.

(2) $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=1,$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=0.$$

由$f'_-(0)\neq f'_+(0)$知$f'(0)$不存在.

7. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在$x=0$处的连续性与可导性.

解 $$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0=f(0),$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

不存在,故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

8. 求下列函数的导数:

(1) $y=\arcsin(\sin x)$;

(2) $y=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$;

(3) $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}-\cos x\cdot\ln\tan x$;

(4) $y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$;

(5) $y=x^{\frac{1}{x}}(x>0)$.

解 (1) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cos x=\dfrac{\cos x}{|\cos x|}$.

(2) $y'=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\dfrac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}=\dfrac{1}{1+x^2}$.

(3) $y'=\dfrac{1}{\tan\dfrac{x}{2}}\cdot\sec^2\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{2}+\sin x\ln\tan x-\cos x\dfrac{1}{\tan x}\sec^2 x$

$=\sin x\cdot\ln\tan x$.

(4) $y'=\dfrac{1}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}}\left(e^x+\dfrac{2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}}\right)=\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

(5) 先在等式两端分别取对数,得 $\ln y=\dfrac{\ln x}{x}$,再在所得等式两端分别对 x 求导,得

$$\frac{y'}{y}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2},$$

于是

$$y'=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x).$$

9. 求下列函数的二阶导数:

(1) $y=\cos^2 x\cdot\ln x$; (2) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 (1) $y'=2\cos x(-\sin x)\cdot\ln x+\cos^2 x\cdot\dfrac{1}{x}=-\sin 2x\cdot\ln x+\dfrac{\cos^2 x}{x}$.

$$y''=-2\cos 2x\cdot\ln x-\sin 2x\cdot\frac{1}{x}+\frac{2\cos x(-\sin x)\cdot x-\cos^2 x}{x^2}$$

$$=-2\cos 2x\cdot\ln x-\frac{2\sin 2x}{x}-\frac{\cos^2 x}{x^2}.$$

(2) $$y'=\frac{\sqrt{1-x^2}-x\dfrac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}}{(\sqrt{1-x^2})^2}=\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

$$y''=-\frac{3}{2}\cdot(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot(-2x)=\frac{3x}{(1-x^2)^{5/2}}.$$

*10. 求下列函数的 n 阶导数：

(1) $y=\sqrt[m]{1+x}$;　　(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

解　(1) $y'=\dfrac{1}{m}(1+x)^{\frac{1}{m}-1}, y''=\dfrac{1}{m}\left(\dfrac{1}{m}-1\right)(1+x)^{\frac{1}{m}-2},\cdots,$

$$y^{(n)}=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{m}-n+1\right)(1+x)^{\frac{1}{m}-n}.$$

(2) 由 $\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$ 知

$$y^{(n)}=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{(n)}=\left(-1+\frac{2}{x+1}\right)^{(n)}=2\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}$$

$$=\frac{2\cdot(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

11. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+xy=e$ 所确定，求 $y''(0)$.

解　把方程两边分别对 x 求导，得

$$e^y y'+y+xy'=0. \tag{1}$$

将 $x=0$ 代入 $e^y+xy=e$，得 $y=1$，再将 $x=0, y=1$ 代入(1)式得 $y'|_{x=0}=-\dfrac{1}{e}$，在(1)式两边分别关于 x 再求导，可得

$$e^y y'^2+e^y y''+y'+y'+xy''=0. \tag{2}$$

将 $x=0, y=1, y'|_{x=0}=-\dfrac{1}{e}$ 代入(2)式，得 $y''(0)=\dfrac{1}{e^2}$.

12. 求下列由参数方程所确定的函数的一阶导数 $\dfrac{dy}{dx}$ 及二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$：

(1) $\begin{cases}x=a\cos^3\theta,\\ y=a\sin^3\theta;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=\ln\sqrt{1+t^2},\\ y=\arctan t.\end{cases}$

解 (1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\dfrac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{3a\cos^2\theta(-\sin\theta)}=-\tan\theta,$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\frac{-\sec^2\theta}{-3a\cos^2\theta\sin\theta}=\frac{1}{3a}\sec^4\theta\csc\theta.$$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{t}{1+t^2}}=\dfrac{1}{t},$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{-\dfrac{1}{t^2}}{\dfrac{t}{1+t^2}}=-\frac{1+t^2}{t^3}.$$

13. 求曲线$\begin{cases}x=2e^t,\\y=e^{-t}\end{cases}$在 $t=0$ 相应的点处的切线方程及法线方程.

解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{-e^{-t}}{2e^t}=-\dfrac{1}{2e^{2t}},\quad \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=-\dfrac{1}{2}.$

$t=0$ 对应的点为$(2,1)$,故曲线在点$(2,1)$处的切线方程为

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-2),$$

即 $x+2y-4=0$. 法线方程为 $y-1=2(x-2)$, 即 $2x-y-3=0$.

14. 已知$f(x)$是周期为 5 的连续函数,它在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x),$$

且$f(x)$在 $x=1$ 处可导,求曲线 $y=f(x)$在点$(6,f(6))$处的切线方程.

解 由$f(x)$连续,令关系式两端 $x\to 0$,取极限得

$$f(1)-3f(1)=0,\qquad f(1)=0.$$

又

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{x}=8,$$

而

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

$$\xlongequal{\text{令 } t=\sin x}\lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)-3f(1-t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)-f(1)}{t}+3\lim_{t\to 0}\frac{f(1-t)-f(1)}{-t}$$

$=4f'(1)$,

故 $f'(1)=2$.

由于 $f(x+5)=f(x)$,于是 $f(6)=f(1)=0$.

$$f'(6)=\lim_{x\to 0}\frac{f(6+x)-f(6)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}=f'(1)=2,$$

因此,曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6,f(6))$,即 $(6,0)$ 处的切线方程为

$$y-0=2(x-6),$$

即 $2x-y-12=0$.

15. 当正在高度 H 飞行的飞机开始向机场跑道下降时,如图 2－7 所示,从飞机到机场的水平地面距离为 L. 假设飞机下降的路径为三次函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图形,其中 $y|_{x=-L}=H, y|_{x=0}=0$. 试确定飞机的降落路径.

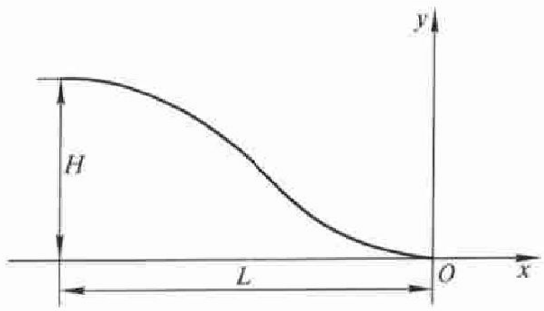


图 2－7

解　设立坐标系如图 2－7 所示. 根据题意,可知

$$y|_{x=0}=0\Rightarrow d=0,$$

$$y|_{x=-L}=H\Rightarrow -aL^3+bL^2-cL=H.$$

为使飞机平稳降落,尚需满足

$$y'|_{x=0}=0\Rightarrow c=0,$$

$$y'|_{x=-L}=0\Rightarrow 3aL^2-2bL=0.$$

解得 $a=\frac{2H}{L^3}, b=\frac{3H}{L^2}$. 故飞机的降落路径为

$$y=H\left[2\left(\frac{x}{L}\right)^3+3\left(\frac{x}{L}\right)^2\right].$$

16. 甲船以 6 km/h 的速率向东行驶,乙船以 8 km/h 的速率向南行驶. 在中午 12 点整,乙船位于甲船之北 16 km 处. 问下午 1 点整两船相离的速率为多少?

解　设从中午 12 点整起,经过 t 小时,甲船与乙船的距离为

$$s=\sqrt{(16-8t)^2+(6t)^2},$$

故速率

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{2(16-8t)\cdot(-8)+72t}{2\sqrt{(16-8t)^2+(6t)^2}}.$$

当 $t=1$ 时(即下午1点整)两船相离的速率为

$$v|_{t=1}=\frac{-128+72}{20}=-2.8(\mathrm{km/h}).$$

17. 利用函数的微分代替函数的增量求 $\sqrt[3]{1.02}$ 的近似值.

解　利用 $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{1}{3}x$,取 $x=0.02$,得

$$\sqrt[3]{1.02}\approx 1+\frac{1}{3}\times(0.02)=1.007.$$

18. 已知单摆的振动周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$,其中 $g=980\ \mathrm{cm/s^2}$,l 为摆长(单位为 cm).设原摆长为 20 cm,为使周期 T 增大 0.05 s,摆长约需加长多少?

解　由 $\Delta T\approx \mathrm{d}T=\frac{\pi}{\sqrt{gl}}\Delta l$,得

$$\Delta l=\frac{\sqrt{gl}}{\pi}\mathrm{d}T\approx\frac{\sqrt{gl}}{\pi}\Delta T,$$

故

$$\Delta l|_{l=20}\approx\frac{\sqrt{980\times 20}}{3.14}\times 0.05\approx 2.23(\mathrm{cm}).$$

即摆长约需加长 2.23 cm.

第三章
微分中值定理与导数的应用

习题 3-1　微分中值定理

1. 验证罗尔定理对函数 $y=\ln\sin x$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上的正确性.

证　函数 $f(x)=\ln\sin x$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上连续,在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$ 内可导,又

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\ln\sin\frac{\pi}{6}=\ln\frac{1}{2},\quad f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\ln\sin\frac{5\pi}{6}=\ln\frac{1}{2},$$

即 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{5}{6}\pi\right)$,故 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上满足罗尔定理条件,由罗尔定理知至少存在一点 $\xi\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$,使 $f'(\xi)=0$. 又 ,$f'(x)=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$,令 $f'(x)=0$ 得 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 取 $n=0$,得 $\xi=\frac{\pi}{2}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$. 因此罗尔定理对函数 $y=\ln\sin x$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上是正确的.

2. 验证拉格朗日中值定理对函数 $y=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间 $[0,1]$ 上的正确性.

证　函数 $f(x)=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足拉格朗日中值定理条件,从而至少存在一点 $\xi\in(0,1)$,使

$$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{-2-(-2)}{1}=0.$$

又,由 $f'(\xi)=12\xi^2-10\xi+1=0$ 可知 $\xi=\frac{5\pm\sqrt{13}}{12}\in(0,1)$,因此拉格朗日中值定理对函数 $y=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间 $[0,1]$ 上是正确的.

3. 对函数 $f(x)=\sin x$ 及 $F(x)=x+\cos x$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上验证柯西中值定理的正确性.

证　函数 $f(x)=\sin x, F(x)=x+\cos x$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续,在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内可导,且在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内,$F'(x)=1-\sin x\neq0$,故 $f(x)$、$F(x)$ 满足柯西中值定理条件,从而至少存在一点 $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,使

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)}{F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(0)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

由

$$\frac{1-0}{\frac{\pi}{2}-1}=\frac{\cos\xi}{1-\sin\xi},$$

即$\dfrac{\cos\frac{\xi}{2}+\sin\frac{\xi}{2}}{\cos\frac{\xi}{2}-\sin\frac{\xi}{2}}=\dfrac{2}{\pi-2}$,可得 $\tan\dfrac{\xi}{2}=\dfrac{4-\pi}{\pi}$. 所以,$\xi=2n\pi+2\arctan\dfrac{4-\pi}{\pi}$. 由题设,取 $n=0$,得 $\xi_0=2\arctan\dfrac{4-\pi}{\pi}$. 因 $0<\dfrac{4-\pi}{\pi}<1$,故 $\xi_0=2\arctan\left(\dfrac{4-\pi}{\pi}\right)\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. 因此,柯西中值定理对 $f(x)=\sin x, F(x)=x+\cos x$ 在区间$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上是正确的.

4. 试证明对函数 $y=px^2+qx+r$ 应用拉格朗日中值定理时所求得的点 ξ 总是位于区间的正中间.

证　任取数值 a,b,不妨设 $a<b$,函数 $f(x)=px^2+qx+r$ 在区间$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,故由拉格朗日中值定理知至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),$$

即 $pb^2+qb+r-pa^2-qa-r=(2p\xi+q)(b-a)$. 经整理得 $\xi=\dfrac{a+b}{2}$,即所求得的 ξ 总是位于区间的正中间.

5. 不用求出函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导数,说明方程$f'(x)=0$ 有几个实根,并指出它们所在的区间.

解　函数 $f(x)$分别在$[1,2]$,$[2,3]$,$[3,4]$上连续,分别在$(1,2)$,$(2,3)$,$(3,4)$内可导,且 $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$. 由罗尔定理知至少存在 $\xi_1\in(1,2)$,$\xi_2\in(2,3)$,$\xi_3\in(3,4)$,使

$$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0.$$

即方程 $f'(x)=0$ 至少有三个实根,又方程 $f'(x)=0$ 为三次方程,故它至多有三个实根,因此方程 $f'(x)=0$ 有且仅有三个实根,它们分别位于区间$(1,2)$,$(2,3)$,$(3,4)$内.

6. 证明恒等式:$\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$.

证　取函数 $f(x)=\arcsin x+\arccos x$,$x\in[-1,1]$. 因

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\equiv 0,$$

故 $f(x)\equiv C$. 取 $x=0$,得 $f(0)=C=\dfrac{\pi}{2}$. 因此

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},\quad x\in[-1,1].$$

7. 若方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x=0$ 有一个正根 $x=x_0$，证明方程 $a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$ 必有一个小于 x_0 的正根.

证　取函数 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x$. $f(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上连续，在 $(0,x_0)$ 内可导，且 $f(0)=f(x_0)=0$，由罗尔定理知至少存在一点 $\xi\in(0,x_0)$，使 $f'(\xi)=0$，即方程 $a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$ 必有一个小于 x_0 的正根.

8. 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶导数，且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，其中 $a<x_1<x_2<x_3<b$. 证明：在 (x_1,x_3) 内至少有一点 ξ，使得 $f''(\xi)=0$.

证　根据题意知函数 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$，$[x_2,x_3]$ 上连续，在 (x_1,x_2)，(x_2,x_3) 内可导且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，故由罗尔定理知至少存在点 $\xi_1\in(x_1,x_2)$，$\xi_2\in(x_2,x_3)$，使 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$.

又 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上连续，在 (ξ_1,ξ_2) 内可导，故由罗尔定理知至少存在点 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(x_1,x_3)$ 使 $f''(\xi)=0$.

9. 设 $a>b>0$，$n>1$，证明：

$$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b).$$

证　取函数 $f(x)=x^n$，$f(x)$ 在 $[b,a]$ 上连续，在 (b,a) 内可导，由拉格朗日中值定理知，至少存在一点 $\xi\in(b,a)$，使

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b),$$

即 $a^n-b^n=n\xi^{n-1}(a-b)$. 又 $0<b<\xi<a$，$n>1$，故

$$0<b^{n-1}<\xi^{n-1}<a^{n-1}.$$

因此

$$nb^{n-1}(a-b)<n\xi^{n-1}(a-b)<na^{n-1}(a-b),$$

即 $nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$.

10. 设 $a>b>0$，证明：

$$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}.$$

证　取函数 $f(x)=\ln x$，$f(x)$ 在 $[b,a]$ 上连续，在 (b,a) 内可导，由拉格朗日中值定理知，至少存在一点 $\xi\in(b,a)$，使

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b),$$

即 $\ln a-\ln b=\frac{1}{\xi}(a-b)$. 又，$0<b<\xi<a$，故 $0<\frac{1}{a}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{b}$，因此

$$\frac{a-b}{a}<\frac{a-b}{\xi}<\frac{a-b}{b},$$

即 $\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$.

11. 证明下列不等式：

(1) $|\arctan a-\arctan b|\leqslant|a-b|$;

(2) 当 $x>1$ 时,$e^x>e\cdot x$.

证 (1) 当 $a=b$ 时,显然成立. 当 $a\neq b$ 时,取函数 $f(x)=\arctan x$,$f(x)$ 在 $[a,b]$ 或 $[b,a]$ 上连续,在 (a,b) 或 (b,a) 内可导,由拉格朗日中值定理知,至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 或 (b,a),使

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b),$$

即 $\arctan a-\arctan b=\dfrac{1}{1+\xi^2}(a-b)$,故

$$|\arctan a-\arctan b|=\frac{1}{1+\xi^2}|a-b|\leqslant|a-b|.$$

(2) 取函数 $f(t)=e^t$,$f(t)$ 在 $[1,x]$ 上连续,在 $(1,x)$ 内可导. 由拉格朗日中值定理知,至少存在一点 $\xi\in(1,x)$,使

$$f(x)-f(1)=f'(\xi)(x-1),$$

即 $e^x-e=e^{\xi}(x-1)$. 又,$1<\xi<x$,故 $e^{\xi}>e$,因此

$$e^x-e>e(x-1),$$

即 $e^x>x\cdot e$.

12. 证明方程 $x^5+x-1=0$ 只有一个正根.

证 取函数 $f(x)=x^5+x-1$,$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,

$$f(0)=-1<0,\quad f(1)=1>0,$$

由零点定理知,至少存在点 $x_1\in(0,1)$,使 $f(x_1)=0$,即方程 $x^5+x-1=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个正根.

若方程 $x^5+x-1=0$ 还有一个正根 x_2,即 $f(x_2)=0$,则由 $f(x)=x^5+x-1$ 在 $[x_1,x_2]$(或 $[x_2,x_1]$)上连续,在 (x_1,x_2)(或 (x_2,x_1))内可导,知 $f(x)$ 满足罗尔定理条件,故至少存在点 $\xi\in(x_1,x_2)$(或 (x_2,x_1)),使

$$f'(\xi)=0.$$

但 $f'(\xi)=5\xi^4+1>0$,矛盾. 因此方程 $x^5+x-1=0$ 只有一个正根.

13. 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,证明在 (a,b) 内有一点 ξ,使

$$\begin{vmatrix}f(a)&f(b)\\g(a)&g(b)\end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix}f(a)&f'(\xi)\\g(a)&g'(\xi)\end{vmatrix}.$$

证 取函数 $F(x)=\begin{vmatrix}f(a)&f(x)\\g(a)&g(x)\end{vmatrix}$,由 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,由拉格朗日中值定理知,至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使 $F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)$. 即

$$F(b)=\begin{vmatrix}f(a)&f(b)\\g(a)&g(b)\end{vmatrix},\quad F(a)=\begin{vmatrix}f(a)&f(a)\\g(a)&g(a)\end{vmatrix}=0,$$

$$F'(x)=\begin{vmatrix}0&f(x)\\0&g(x)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}f(a)&f'(x)\\g(a)&g'(x)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}f(a)&f'(x)\\g(a)&g'(x)\end{vmatrix},$$

故
$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}(b-a).$$

14. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足关系式 $f'(x)=f(x)$，且 $f(0)=1$，则 $f(x)=e^x$.

证　取函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$，因
$$F'(x)=\frac{f'(x)e^x-f(x)e^x}{e^{2x}}=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}=0,$$
故 $F(x)=C$. 又 $F(0)=C=f(0)=1$，因此 $F(x)=1$，即 $\dfrac{f(x)}{e^x}=1$，故 $f(x)=e^x$.

***15**. 设函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有 n 阶导数，且 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$，试用柯西中值定理证明：
$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}\quad(0<\theta<1).$$

证　已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有 n 阶导数，在该邻域内任取点 x，由柯西中值定理得
$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f(x)-f(0)}{x^n-0^n}=\frac{f'(\xi_1)}{n\xi_1^{n-1}},$$
其中 ξ_1 介于 $0,x$ 之间. 又
$$\frac{f'(\xi_1)}{n\xi_1^{n-1}}=\frac{f'(\xi_1)-f'(0)}{n(\xi_1^{n-1}-0^{n-1})}=\frac{f''(\xi_2)}{n(n-1)\xi_2^{n-2}},$$
其中 ξ_2 介于 $0,\xi_1$ 之间. 依此类推，得
$$\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{n!\,\xi_{n-1}}=\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})-f^{(n-1)}(0)}{n!\,(\xi_{n-1}-0)}=\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!},$$
其中 ξ_n 介于 $0,\xi_{n-1}$ 之间，记 $\xi_n=\theta x(0<\theta<1)$，因此
$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}\quad(0<\theta<1).$$

习题 3－2　洛必达法则

1. 用洛必达法则求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$; (6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}(a\neq 0)$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}$; (8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$;

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}$; (10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}$;

(11) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x$; (12) $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{1/x^2}$;

(13) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$; (14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$;

(15) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}$; (16) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{1+x}}{1}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\dfrac{2}{1}=2$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\dfrac{1}{2}x^2}=2$.

(4) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{3\cos 3x}{5\sec^2 5x}=-\dfrac{3}{5}$.

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\dfrac{1}{\sin x}\cos x}{2(\pi-2x)\cdot(-2)}=-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cot x}{4(\pi-2x)}$

$$=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\csc^2 x}{-8}=-\frac{1}{8}.$$

(6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}=\dfrac{m}{n}a^{m-n}(a\neq 0)$.

(7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{\tan 7x}\cdot\sec^2 7x\cdot 7}{\dfrac{1}{\tan 2x}\sec^2 2x\cdot 2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan 2x}{\tan 7x}\cdot\dfrac{\sec^2 7x}{\sec^2 2x}\cdot\dfrac{7}{2}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{7x}\cdot\frac{\sec^2 7x}{\sec^2 2x}\cdot\frac{7}{2}=1.$$

(8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sec^2 x}{3\sec^2 3x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 3x}{3\cos^2 x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-6\cos 3x\sin 3x}{-6\cos x\sin x}$

$$=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-3\sin 3x}{-\sin x}=3.$$

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{-\dfrac{1}{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x^2}{x+x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^2}+1}{\dfrac{1}{x}+1}=1.$

(10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{2x}{1+x^2}}{\sec x\tan x+\sin x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{\cos^2x}{1+\cos^2x}\cdot\frac{2}{1+x^2}=1.$$

(11) $\lim\limits_{x\to0}x\cot 2x=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\tan 2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2\sec^2 2x}=\dfrac{1}{2}.$

(12) $\lim\limits_{x\to0}x^2\mathrm{e}^{1/x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{1/x^2}}{\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{1/x^2}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'}{\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'}=\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{1/x^2}=+\infty.$

(13) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-1}{2x}=-\dfrac{1}{2}.$

(14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}$，而

$$\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\dfrac{a}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{1+\dfrac{a}{x}}\cdot\left(-\dfrac{a}{x^2}\right)}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{1+\dfrac{a}{x}}=a,$$

故$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x=\mathrm{e}^a$.

(15) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\ln x}$，而

$$\lim_{x\to0^+}\sin x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0,$$

故$\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}=e^0=1$.

(16) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\tan x\ln\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{-\ln x}{\frac{1}{x}}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}x}=e^0=1.$$

注　在用洛必达法则求极限时,除了注意用洛必达法则对极限类型等的要求以外,还要注意求极限的过程中合理地应用重要极限、等价无穷小、初等变换等方法,以使运算过程更快捷、简洁.

2. 验证极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$存在,但不能用洛必达法则得出.

证　由于$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+\sin x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{1}$不存在,故不能使用洛必达法则来求此极限,但并不表明此极限不存在,此极限可用以下方法求得:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1+0=1.$$

3. 验证极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$存在,但不能用洛必达法则得出.

证　由于$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$不存在,故不能使用洛必达法则来求此极限,但可用以下方法求此极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=1\cdot 0=0.$$

*4. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}, & x>0,\\ e^{-\frac{1}{2}}, & x\leqslant 0\end{cases}$$

在点$x=0$处的连续性.

解　　$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]},$$

而

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right]=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}-\frac{1}{2(1+x)}=-\frac{1}{2},$$

故

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=e^{-\frac{1}{2}},$$

又

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}e^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}},f(0)=e^{-\frac{1}{2}}.$$

因为$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$,故函数$f(x)$在$x=0$处连续.

习题 3－3 泰勒公式

1. 按$(x-4)$的幂展开多项式$f(x)=x^4-5x^3+x^2-3x+4$.

解 因为

$$f'(x)=4x^3-15x^2+2x-3,f''(x)=12x^2-30x+2,$$
$$f'''(x)=24x-30,f^{(4)}(x)=24,f^{(n)}(x)=0(n\geqslant5).$$
$$f(4)=-56,f'(4)=21,f''(4)=74,f'''(4)=66,f^{(4)}(4)=24,$$

故

$$\begin{aligned}&x^4-5x^3+x^2-3x+4\\&=f(4)+f'(4)(x-4)+\frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2+\frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3+\frac{f^{(4)}(4)}{4!}(x-4)^4\\&=-56+21(x-4)+37(x-4)^2+11(x-4)^3+(x-4)^4.\end{aligned}$$

2. 应用麦克劳林公式,按x的幂展开函数$f(x)=(x^2-3x+1)^3$.

解
$$\begin{aligned}&f(x)=x^6-9x^5+30x^4-45x^3+30x^2-9x+1, && f(0)=1,\\&f'(x)=6x^5-45x^4+120x^3-135x^2+60x-9, && f'(0)=-9,\\&f''(x)=30x^4-180x^3+360x^2-270x+60, && f''(0)=60,\\&f'''(x)=120x^3-540x^2+720x-270, && f'''(0)=-270,\\&f^{(4)}(x)=360x^2-1\,080x+720, && f^{(4)}(0)=720,\\&f^{(5)}(x)=720x-1\,080, && f^{(5)}(0)=-1\,080,\\&f^{(6)}(x)=720, && f^{(6)}(0)=720,\\&f^{(n)}(x)=0\quad(n\geqslant7),\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}&(x^2-3x+1)^3\\&=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5+\frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6\\&=1-9x+30x^2-45x^3+30x^4-9x^5+x^6.\end{aligned}$$

3. 求函数$f(x)=\sqrt{x}$按$(x-4)$的幂展开的带有拉格朗日余项的3阶泰勒公式.

解　因为$f(x)=\sqrt{x},f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}},f'''(x)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$,

$f^{(4)}(x)=-\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}.f(4)=2,f'(4)=\frac{1}{4},f''(4)=-\frac{1}{32},f'''(4)=\frac{3}{256}.$

故

$$\begin{aligned}\sqrt{x}&=f(4)+f'(4)(x-4)+\frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2+\frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3+\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-4)^4\\&=2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2+\frac{1}{512}(x-4)^3-\frac{15}{384\xi^{7/2}}(x-4)^4,\end{aligned}$$

其中ξ介于x与4之间.

4. 求函数$f(x)=\ln x$按$(x-2)$的幂展开的带有佩亚诺余项的n阶泰勒公式.

解　因为

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n},\quad f^{(n)}(2)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2^n},$$

故

$$\begin{aligned}\ln x&=f(2)+f'(2)(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3+\cdots+\\&\quad\frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n+o[(x-2)^n]\\&=\ln 2+\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{2^3}(x-2)^2+\frac{1}{3\cdot 2^3}(x-2)^3+\cdots+\\&\quad(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 2^n}(x-2)^n+o[(x-2)^n].\end{aligned}$$

5. 求函数$f(x)=\frac{1}{x}$按$(x+1)$的幂展开的带有拉格朗日余项的n阶泰勒公式.

解　因为

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}},\quad f^{(n)}(-1)=-n!,$$

故

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}&=f(-1)+f'(-1)(x+1)+\frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2+\frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3+\cdots+\\&\quad\frac{f^{(n)}(-1)}{n!}(x+1)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x+1)^{n+1}\\&=-[1+(x+1)+(x+1)^2+\cdots+(x+1)^n]+(-1)^{n+1}\xi^{-(n+2)}(x+1)^{n+1},\end{aligned}$$

其中ξ介于x与-1之间.

6. 求函数$f(x)=\tan x$的带有佩亚诺余项的3阶麦克劳林公式.

解　因为

$$f(x)=\tan x,\quad f'(x)=\sec^2 x,\quad f''(x)=2\sec^2 x\tan x,$$

$$f'''(x)=4\sec^2 x\tan^2 x+2\sec^4 x,$$
$$\begin{aligned}f^{(4)}(x)&=8\sec^2 x\tan^3 x+8\sec^4 x\tan x+8\sec^4 x\tan x\\&=8\sec^2 x\tan^3 x+16\sec^4 x\tan x\\&=\frac{8(\sin^2 x+2)\sin x}{\cos^5 x},\end{aligned}$$
$$f(0)=0,f'(0)=1,f''(0)=0,f'''(0)=2,$$

故 $f(x)=x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$.

7. 求函数 $f(x)=xe^x$ 的带有佩亚诺余项的 n 阶麦克劳林公式.

解　因为 $f(x)=xe^x,f^{(n)}(x)=(n+x)e^x$（见习题 2-3,11(4)）,$f^{(n)}(0)=n$,故

$$\begin{aligned}xe^x&=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+o(x^n)\\&=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{(n-1)!}+o(x^n).\end{aligned}$$

8. 验证当 $0<x\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时,按公式 $e^x\approx1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$ 计算 e^x 的近似值时,所产生的误差小于 0.01,并求 $\sqrt{e}$ 的近似值,使误差小于 0.01.

证　设 $f(x)=e^x$,则 $f^{(n)}(0)=1$,故 $f(x)=e^x$ 的三阶麦克劳林公式为 $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{e^\xi}{4!}x^4$,其中 ξ 介于 0 与 x 之间. 按 $e^x\approx1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$ 计算 e^x 的近似值时,其误差为

$$|R_3(x)|=\frac{e^\xi}{4!}x^4.$$

当 $0<x\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时,$0<\xi<\dfrac{1}{2}$,$|R_3(x)|\leqslant\dfrac{3^{\frac{1}{2}}}{4!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^4\approx0.0045<0.01$,

$$\sqrt{e}\approx1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3\approx1.645.$$

9. 应用三阶泰勒公式求下列各数的近似值,并估计误差:

(1) $\sqrt[3]{30}$;　　(2) $\sin 18°$.

解　(1) 因为

$$\begin{aligned}f(x)&=\sqrt[3]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{3}}\\&\approx1+\frac{1}{3}x+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^3\\&=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3,\end{aligned}$$
$$R_3(x)=\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)}{4!}(1+\xi)^{\frac{1}{3}-4}x^4,$$

其中ξ介于0与x之间.故

$$\sqrt[3]{30}=\sqrt[3]{27+3}=3\sqrt[3]{1+\frac{1}{9}}\approx 3\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}\right)^2+\frac{5}{81}\left(\frac{1}{9}\right)^3\right]\approx 3.10724.$$

误差

$$|R_3|=3\cdot\left|\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)}{4!}(1+\xi)^{\frac{1}{3}-4}\left(\frac{1}{9}\right)^4\right|,$$

ξ介于0与$\frac{1}{9}$之间,即$0<\xi<\frac{1}{9}$,因此

$$|R_3|=\left|\frac{80}{4!\cdot 3^{11}}\right|\approx 1.88\times 10^{-5}.$$

(2) 已知$\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}$,$R_4(x)=\frac{\sin\left(\xi+\frac{5}{2}\pi\right)}{5!}x^5$,$\xi$介于0与$\frac{\pi}{10}$之间,故

$$\sin 18^\circ=\sin\frac{\pi}{10}\approx\frac{\pi}{10}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^3\approx 0.3090,$$

$$|R_4|\leqslant\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^5\approx 2.55\times 10^{-5}.$$

注 利用$R_3(x)=\frac{\sin\left(\xi+\frac{4}{2}\pi\right)}{4!}x^4$,$\xi\in\left(0,\frac{\pi}{10}\right)$,可得误差$|R_3|\leqslant\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^4\approx 1.3\times 10^{-4}$.

*10. 利用泰勒公式求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3})$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

解 (1)
$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3})\\&=\lim_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(1-\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{4}}\right]\\&=\lim_{x\to+\infty}x\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)-1+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]\end{aligned}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3}{2}+\frac{o\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right]=\frac{3}{2}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)-1-\left(-\frac{x^2}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4)}{x^2\left[x+\left(-x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{8}\right)x^4+o(x^4)}{-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}+\frac{o(x^4)}{x^4}}{-\frac{1}{2}+\frac{o(x^4)}{x^4}}=\frac{-\frac{1}{12}}{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-\left(1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right)}{\left[1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-1-x^2+o(x^2)\right][x^2+o(x^2)]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8}x^4+o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4+o(x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8}+\frac{o(x^4)}{x^4}}{-\frac{3}{2}+\frac{o(x^4)}{x^4}}=\frac{\frac{1}{8}}{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{12}.$$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[x-x+\frac{1}{2}+\frac{o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}\right]=\frac{1}{2}.$$

习题 3-4 函数的单调性与曲线的凹凸性

1. 判定函数 $f(x)=\arctan x-x$ 的单调性.

解 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-1=-\dfrac{x^2}{1+x^2}\leqslant 0$ 且 $f'(x)=0$ 仅在 $x=0$ 时成立. 因此函数 $f(x)=\arctan x-x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调减少.

2. 判定函数 $f(x)=x+\cos x$ 的单调性.

解　$f'(x)=1-\sin x\geqslant 0$，且当 $x=2n\pi+\frac{\pi}{2}(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，$f'(x)=0$. 可以看出在 $(-\infty,+\infty)$ 的任一有限子区间上，使 $f'(x)=0$ 的点只有有限个. 因此函数 $f(x)=x+\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加.

3. 确定下列函数的单调区间：

(1) $y=2x^3-6x^2-18x-7$；　(2) $y=2x+\frac{8}{x}(x>0)$；

(3) $y=\frac{10}{4x^3-9x^2+6x}$；　(4) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；

(5) $y=(x-1)(x+1)^3$；　(6) $y=\sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2}(a>0)$；

(7) $y=x^n e^{-x}\quad(n>0,x\geqslant 0)$；(8) $y=x+|\sin 2x|$.

解　(1) 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且

$$y'=6x^2-12x-18=6(x-3)(x+1).$$

令 $y'=0$，得驻点 $x_1=-1,x_2=3$，这两个驻点把 $(-\infty,+\infty)$ 分成三个部分区间 $(-\infty,-1]$，$[-1,3]$，$[3,+\infty)$.

当 $-\infty<x<-1$ 及 $3<x<+\infty$ 时，$y'>0$，因此函数在 $(-\infty,-1]$，$[3,+\infty)$ 上单调增加；当 $-1<x<3$ 时，$y'<0$，因此函数在 $[-1,3]$ 上单调减少.

(2) 函数的定义域为 $(0,+\infty)$，在 $(0,+\infty)$ 内可导，且

$$y'=2-\frac{8}{x^2}=\frac{2x^2-8}{x^2}=\frac{2(x-2)(x+2)}{x^2}.$$

令 $y'=0$，得驻点 $x_1=-2$(舍去)，$x_2=2$. 它把 $(0,+\infty)$ 分成两个部分区间 $(0,2]$，$[2,+\infty)$.

当 $0<x<2$ 时，$y'<0$，因此函数在 $(0,2]$ 上单调减少；当 $2<x<+\infty$ 时，$y'>0$，因此函数在 $[2,+\infty)$ 上单调增加.

(3) 函数除 $x=0$ 外处处可导，且

$$y'=\frac{-10(12x^2-18x+6)}{(4x^3-9x^2+6x)^2}=\frac{-120\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)}{(4x^3-9x^2+6x)^2}.$$

令 $y'=0$，得驻点 $x_1=\frac{1}{2},x_2=1$. 这两个驻点把区间 $(-\infty,0)$ 及 $(0,+\infty)$ 分成四个部分区间 $(-\infty,0)$，$\left(0,\frac{1}{2}\right]$，$\left[\frac{1}{2},1\right]$，$[1,+\infty)$.

当 $-\infty<x<0,0<x<\frac{1}{2},1<x<+\infty$ 时，$y'<0$，因此函数在 $(-\infty,0)$，$\left(0,\frac{1}{2}\right]$，$[1,+\infty)$ 内单调减少；当 $\frac{1}{2}<x<1$ 时，$y'>0$，因此函数在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上单调增加.

(4) 函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0,$$

因此函数在$(-\infty,+\infty)$内单调增加.

(5) 函数在$(-\infty,+\infty)$内可导，且

$$\begin{aligned}y'&=(x+1)^3+(x-1)\cdot 3(x+1)^2\\&=(x+1)^2(4x-2)=4(x+1)^2\left(x-\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

令$y'=0$，得驻点$x_1=-1,x_2=\frac{1}{2}$，这两个驻点把区间$(-\infty,+\infty)$分成三个部分区间$(-\infty,-1]$，$\left[-1,\frac{1}{2}\right]$及$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

当$-\infty<x<-1$及$-1<x<\frac{1}{2}$时，$y'<0$，因此函数在$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$上单调减少；当$\frac{1}{2}<x<+\infty$时，$y'>0$，因此函数在$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调增加.

(6) 函数在$x_1=\frac{a}{2},x_2=a$处不可导且在$\left(-\infty,\frac{a}{2}\right)$，$\left(\frac{a}{2},a\right)$，$(a,+\infty)$内可导，$y'=\dfrac{-6\left(x-\frac{2a}{3}\right)}{3\sqrt[3]{(2x-a)^2(a-x)}}$.

令$y'=0$，得驻点$x_3=\frac{2a}{3}$，这个驻点及$x_1=\frac{a}{2},x_2=a$把区间$(-\infty,+\infty)$分成四个部分区间$\left(-\infty,\frac{a}{2}\right]$，$\left[\frac{a}{2},\frac{2}{3}a\right]$，$\left[\frac{2}{3}a,a\right]$，$[a,+\infty)$.

当$-\infty<x<\frac{a}{2}$及$\frac{a}{2}<x<\frac{2}{3}a$，$a<x<+\infty$时，$y'>0$，因此函数在$\left(-\infty,\frac{2}{3}a\right]$，$[a,+\infty)$上单调增加；当$\frac{2a}{3}<x<a$时，$y'<0$，因此函数在$\left[\frac{2}{3}a,a\right]$上单调减少.

(7) 函数在$[0,+\infty)$内可导，且

$$y'=nx^{n-1}e^{-x}-x^ne^{-x}=x^{n-1}e^{-x}(n-x).$$

令$y'=0$，得驻点$x_1=n$，这个驻点把区间$[0,+\infty)$分成两个部分区间$[0,n]$，$[n,+\infty)$.

当$0<x<n$时，$y'>0$，因此函数在$[0,n]$上单调增加；当$n<x<+\infty$时，$y'<0$，因此函数在$[n,+\infty)$上单调减少.

(8) 函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，且

$$y=\begin{cases}x+\sin 2x, & n\pi\leqslant x\leqslant n\pi+\frac{\pi}{2},\\ x-\sin 2x, & n\pi+\frac{\pi}{2}<x\leqslant(n+1)\pi\end{cases}\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

$$y'=\begin{cases}1+2\cos 2x, & n\pi<x<n\pi+\dfrac{\pi}{2},\\ 1-2\cos 2x, & n\pi+\dfrac{\pi}{2}<x<(n+1)\pi\end{cases}\quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

令 $y'=0$,得驻点 $x=n\pi+\dfrac{\pi}{3}$ 及 $x=n\pi+\dfrac{5\pi}{6}$,按照这些驻点将区间$(-\infty,+\infty)$分成下列部分区间

$$\left[n\pi,n\pi+\frac{\pi}{3}\right],\left[n\pi+\frac{\pi}{3},n\pi+\frac{\pi}{2}\right],\left[n\pi+\frac{\pi}{2},n\pi+\frac{5\pi}{6}\right],\left[n\pi+\frac{5\pi}{6},(n+1)\pi\right]$$
$$(n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

当 $n\pi<x<n\pi+\dfrac{\pi}{3}$时,$y'>0$,因此函数在$\left[n\pi,n\pi+\dfrac{\pi}{3}\right]$上单调增加;

当 $n\pi+\dfrac{\pi}{3}<x<n\pi+\dfrac{\pi}{2}$时,$y'<0$,因此函数在$\left[n\pi+\dfrac{\pi}{3},n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调减少;

当 $n\pi+\dfrac{\pi}{2}<x<n\pi+\dfrac{5\pi}{6}$时,$y'>0$,因此函数在$\left[n\pi+\dfrac{\pi}{2},n\pi+\dfrac{5}{6}\pi\right]$上单调增加;

当 $n\pi+\dfrac{5\pi}{6}<x<(n+1)\pi$ 时,$y'<0$,因此函数在$\left[n\pi+\dfrac{5}{6}\pi,(n+1)\pi\right]$上单调减少.

综上可知,函数在$\left[\dfrac{k\pi}{2},\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right]$上单调增加,在$\left[\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3},\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调减少$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

4. 设函数$f(x)$在定义域内可导,$y=f(x)$的图形如图 3-1 所示,则导函数$f'(x)$的图形为图 3-2中所示的四个图形中的哪一个?

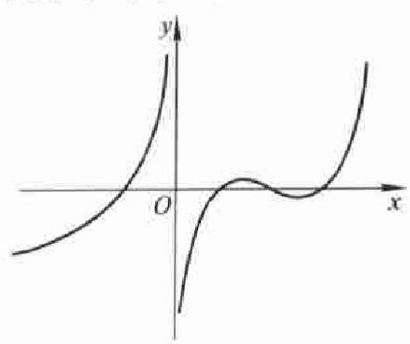


图 3-1

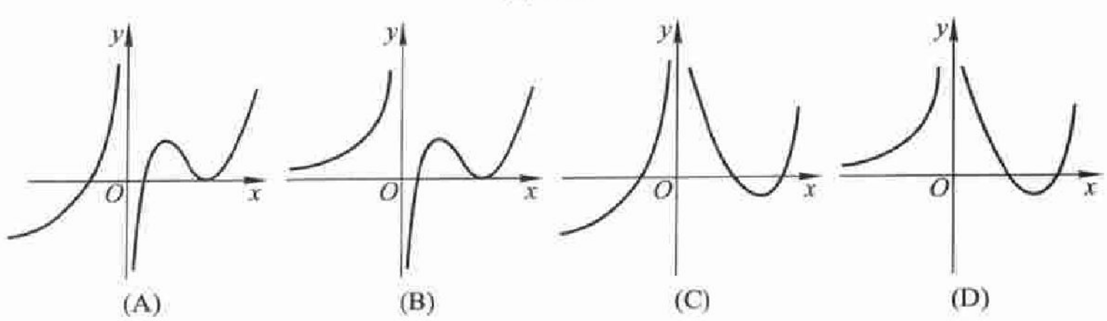


图 3-2

解 由所给图形知，当 $x<0$ 时，$y=f(x)$ 单调增加，从而 $f'(x)\geqslant 0$，故排除(A)，(C)；当 $x>0$ 时，随着 x 增大，$y=f(x)$ 先单调增加，然后单调减少，再单调增加，因此随着 x 增大，先有 $f'(x)\geqslant 0$，然后 $f'(x)\leqslant 0$，继而又有 $f'(x)\geqslant 0$，故应选(D).

5. 证明下列不等式：

(1) 当 $x>0$ 时，$1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$；

(2) 当 $x>0$ 时，$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$；

(3) 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x+\tan x>2x$；

(4) 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\tan x>x+\frac{1}{3}x^3$；

(5) 当 $x>4$ 时，$2^x>x^2$.

解 (1) 取 $f(t)=1+\frac{1}{2}t-\sqrt{1+t},t\in[0,x]$.

$$f'(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+t}}=\frac{\sqrt{1+t}-1}{2\sqrt{1+t}}>0,\quad t\in(0,x).$$

因此，函数 $f(t)$ 在 $[0,x]$ 上单调增加，故当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)$，即

$$1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}>1+\frac{1}{2}\cdot 0-\sqrt{1+0}=0,$$

亦即 $1+\frac{x}{2}>\sqrt{1+x}\quad(x>0)$.

(2) 取 $f(t)=1+t\ln(t+\sqrt{1+t^2})-\sqrt{1+t^2},t\in[0,x]$.

$$f'(t)=\ln(t+\sqrt{1+t^2})+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}=\ln(t+\sqrt{1+t^2})>0,t\in(0,x).$$

因此，函数 $f(t)$ 在 $[0,x]$ 上单调增加，故当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)$，即

$$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}>1+0-1=0,$$

亦即 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}\quad(x>0)$.

(3) 取 $f(x)=\sin x+\tan x-2x,x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

$$f'(x)=\cos x+\sec^2x-2,$$

$$f''(x)=-\sin x+2\sec^2x\tan x=\sin x(2\sec^3x-1)>0,\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

因此，$f'(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加，故当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f'(x)>f'(0)=0$，从而 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加，即 $f(x)>f(0)=0$，亦即

$$\sin x+\tan x-2x>0, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$

所以，$\sin x+\tan x>2x, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

(4) 取 $f(x)=\tan x-x-\frac{1}{3}x^3, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

$$f'(x)=\sec^2x-1-x^2=\tan^2x-x^2=(\tan x-x)(\tan x+x).$$

由

$$g'(x)=(\tan x-x)'=\sec^2x-1=\tan^2x>0$$

知 $g(x)=\tan x-x$ 在$[0,x]$上单调增加，即

$$g(x)=\tan x-x>g(0)=0.$$

故$f'(x)>0, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. 从而 $f(x)$ 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调增加，因此 $f(x)>f(0)$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. 即当 $0<x<\frac{\pi}{2}$时，$\tan x-x-\frac{1}{3}x^3>0$. 从而

$$\tan x>x+\frac{1}{3}x^3\quad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

(5) 取 $f(t)=t\ln 2-2\ln t, t\in[4,x]$.

$$f'(t)=\ln 2-\frac{2}{t}=\frac{\ln 4}{2}-\frac{2}{x}>\frac{\ln e}{2}-\frac{2}{4}=0,$$

故当 $x>4$ 时，$f(x)$单调增加，从而$f(x)>f(4)=0$，即

$$x\ln 2-2\ln x>0,$$

亦即 $2^x>x^2\ (x>4)$.

6. 讨论方程 $\ln x=ax$(其中 $a>0$)有几个实根？

解　取函数 $f(x)=\ln x-ax, x\in(0,+\infty)$.

$$f'(x)=\frac{1}{x}-a.$$

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=\frac{1}{a}$.

当 $0<x<\frac{1}{a}$时，$f'(x)>0$，因此函数 $f(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$内单调增加；当$\frac{1}{a}<x<+\infty$时，$f'(x)<0$，因此函数 $f(x)$ 在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$内单调减少. 从而 $f\left(\frac{1}{a}\right)$为最大值，又$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，故

当$f\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}-1=0$，即 $a=\frac{1}{e}$时，曲线 $y=\ln x-ax$ 与 x 轴仅有一个交点，这时，原方程有惟一实根.

当$f\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}-1>0$，即$0<a<\frac{1}{e}$时，曲线 $y=\ln x-ax$ 与 x 轴有两个交点，这

时,原方程有两个实根.

当$f\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}-1<0$,即$a>\frac{1}{\mathrm{e}}$时,曲线$y=\ln x-ax$与$x$轴没有交点,这时,原方程没有实根.

7. 单调函数的导函数是否必为单调函数?研究下面这个例子:

$$f(x)=x+\sin x.$$

解　单调函数的导函数不一定是单调函数. 例如函数$f(x)=x+\sin x$,由于$f'(x)=1+\cos x\geqslant 0$,且$f'(x)$在任何有限区间内只有有限个零点. 因此函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内为单调增加函数. 但它的导函数$f'(x)=1+\cos x$在$(-\infty,+\infty)$内却不是单调函数.

8. 设I为一无穷区间,函数$f(x)$在I上连续,I内可导,试证明:如果在I的任一有限的子区间上,$f'(x)\geqslant 0$(或$f'(x)\leqslant 0$),且等号仅在有限多个点处成立,那么$f(x)$在区间I上单调增加(或单调减少).

证　在I内任取两点x_1、x_2,不妨设$x_1<x_2$. 在$[x_1,x_2]$上应用拉格朗日中值定理,得到

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\geqslant 0\quad(\text{或}\leqslant 0),$$

其中$\xi\in(x_1,x_2)$,即$f(x_2)\geqslant f(x_1)$(或$f(x_2)\leqslant f(x_1)$),因此,$f(x)$在I上单调不减(或单调不增),从而对任一$x\in[x_1,x_2]$,有

$$f(x_2)\geqslant f(x)\geqslant f(x_1)\quad(\text{或}f(x_2)\leqslant f(x)\leqslant f(x_1)).$$

若$f(x_1)=f(x_2)$,则有$f(x)\equiv f(x_1)$,$x\in[x_1,x_2]$,故$f'(x)\equiv 0$,$x\in[x_1,x_2]$,这与$f'(x)=0$在I的任一有限子区间上仅在有限多个点处成立的假定相矛盾,因此$f(x_2)>f(x_1)$(或$f(x_2)<f(x_1)$),即$f(x)$在区间I上单调增加(或单调减少).

9. 判定下列曲线的凹凸性:

(1) $y=4x-x^2$;　　(2) $y=\operatorname{sh}x$;

(3) $y=x+\frac{1}{x}\quad(x>0)$;(4) $y=x\arctan x$.

解　(1) $y'=4-2x$,$y''=-2<0$. 故曲线$y=4x-x^2$在$(-\infty,+\infty)$内是凸的.

(2) $y'=\operatorname{ch}x$,$y''=\operatorname{sh}x$,令$y''=0$,得$x=0$.

当$-\infty<x<0$时,$y''<0$,曲线$y=\operatorname{sh}x$在$(-\infty,0]$上是凸的.

当$0<x<+\infty$时,$y''>0$,曲线$y=\operatorname{sh}x$在$[0,+\infty)$上是凹的.

(3) $y'=1-\frac{1}{x^2}$,$y''=\frac{2}{x^3}>0(x>0)$,故曲线$y=x+\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$内是凹的.

(4) $y'=\arctan x+\frac{x}{1+x^2}$,$y''=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1+x^2-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2}{(1+x^2)^2}>0$,

故曲线$y=x\arctan x$在$(-\infty,+\infty)$内是凹的.

10. 求下列函数图形的拐点及凹或凸的区间:

(1) $y=x^3-5x^2+3x+5$;　　(2) $y=xe^{-x}$;

(3) $y=(x+1)^4+e^x$;　　(4) $y=\ln(x^2+1)$;

(5) $y=e^{\arctan x}$;　　(6) $y=x^4(12\ln x-7)$.

解　(1) $y'=3x^2-10x+3, y''=6x-10$,令 $y''=0$ 得 $x=\frac{5}{3}$.

当 $-\infty<x<\frac{5}{3}$ 时,$y''<0$,因此曲线在 $\left(-\infty,\frac{5}{3}\right]$ 上是凸的;当 $\frac{5}{3}<x<+\infty$ 时,$y''>0$,因此曲线在 $\left[\frac{5}{3},+\infty\right)$ 上是凹的. 故点 $\left(\frac{5}{3},\frac{20}{27}\right)$ 为拐点.

(2) $y'=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}, y''=-e^{-x}+(1-x)(-e^{-x})=e^{-x}(x-2)$.

令 $y''=0$,得 $x=2$.

当 $-\infty<x<2$ 时,$y''<0$,因此曲线在 $(-\infty,2]$ 上是凸的;当 $2<x<+\infty$ 时,$y''>0$,因此曲线在 $(2,+\infty)$ 上是凹的. 故点 $\left(2,\frac{2}{e^2}\right)$ 为拐点.

(3) $y'=4(x+1)^3+e^x, y''=12(x+1)^2+e^x>0$,因此曲线在 $(-\infty,+\infty)$ 内是凹的,曲线没有拐点.

(4) $y'=\frac{2x}{x^2+1}, y''=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$.

令 $y''=0$,得 $x_1=-1, x_2=1$.

当 $-\infty<x<-1$ 时,$y''<0$,因此曲线在 $(-\infty,-1]$ 上是凸的;当 $-1<x<1$ 时,$y''>0$,因此曲线在 $[-1,1]$ 上是凹的;当 $1<x<+\infty$ 时,$y''<0$,因此曲线在 $[1,+\infty)$ 上是凸的. 曲线有两个拐点,分别为 $(-1,\ln 2)$, $(1,\ln 2)$.

(5) $y'=e^{\arctan x}\frac{1}{1+x^2}, y''=\frac{-2e^{\arctan x}\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(1+x^2)^2}$,令 $y''=0$,得 $x=\frac{1}{2}$.

当 $-\infty<x<\frac{1}{2}$ 时,$y''>0$,因此曲线在 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ 上是凹的;当 $\frac{1}{2}<x<+\infty$ 时,$y''<0$,因此曲线在 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上是凸的. 故点 $\left(\frac{1}{2},e^{\arctan\frac{1}{2}}\right)$ 为拐点.

(6) $y'=4x^3(12\ln x-7)+x^4\cdot 12\frac{1}{x}=4x^3(12\ln x-4)$,

$$y''=12x^2(12\ln x-4)+4x^3\cdot 12\frac{1}{x}=144x^2\ln x\ (x>0).$$

令 $y''=0$,得 $x=1$.

当 $0<x<1$ 时,$y''<0$,因此曲线在 $(0,1]$ 上是凸的;当 $1<x<+\infty$ 时,$y''>0$,因此曲线在 $[1,+\infty)$ 上是凹的. 故点 $(1,-7)$ 为拐点.

11. 利用函数图形的凹凸性,证明下列不等式:

（1）$\frac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \quad (x>0,y>0,x\neq y,n>1)$；

（2）$\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}(x\neq y)$；

（3）$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}\ (x>0,y>0,x\neq y)$.

证　（1）取函数 $f(t)=t^n,t\in(0,+\infty)$.

$$f'(t)=nt^{n-1},f''(t)=n(n-1)t^{n-2},t\in(0,+\infty).$$

当 $n>1$ 时，$f''(t)>0,t\in(0,+\infty)$. 因此 $f(t)=t^n$ 在 $(0,+\infty)$ 内图形是凹的，故对任何 $x>0,y>0,x\neq y$，恒有

$$\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]>f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

即 $\frac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \quad (x>0,y>0,x\neq y,n>1)$.

（2）取函数 $f(t)=e^t,t\in(-\infty,+\infty)$. $f'(t)=e^t,f''(t)=e^t>0,t\in(-\infty,+\infty)$. 因此 $f(t)=e^t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内图形是凹的，故对任何 $x,y\in(-\infty,+\infty),x\neq y$，恒有 $\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]>f\left(\frac{x+y}{2}\right)$，即

$$\frac{1}{2}(e^x+e^y)>e^{\frac{x+y}{2}} \quad (x\neq y).$$

（3）取函数 $f(t)=t\ln t,t\in(0,+\infty)$，$f'(t)=\ln t+1$，$f''(t)=\frac{1}{t}>0$，$t\in(0,+\infty)$，因此 $f(t)=t\ln t$ 在 $(0,+\infty)$ 内图形是凹的，故对任何 $x,y\in(0,+\infty),x\neq y$，恒有 $\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]>f\left(\frac{x+y}{2}\right)$，即

$$\frac{1}{2}(x\ln x+y\ln y)>\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2},$$

亦即

$$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}\ (x\neq y).$$

***12.** 试证明曲线 $y=\frac{x-1}{x^2+1}$ 有三个拐点位于同一直线上.

证　$y'=\frac{(x^2+1)-2x(x-1)}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$,

$$y''=\frac{(-2x+2)(x^2+1)^2-2(x^2+1)\cdot 2x(-x^2+2x+1)}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{2x^3-6x^2-6x+2}{(x^2+1)^3}$$

$$=\frac{2(x+1)[x-(2-\sqrt{3})][x-(2+\sqrt{3})]}{(x^2+1)^3}.$$

令 $y''=0$，得 $x_1=-1, x_2=2-\sqrt{3}, x_3=2+\sqrt{3}$.

当 $-\infty<x<-1$ 时，$y''<0$，因此曲线在 $(-\infty,-1]$ 上是凸的；

当 $-1<x<2-\sqrt{3}$ 时，$y''>0$，因此曲线在 $[-1,2-\sqrt{3}]$ 上是凹的；

当 $2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$ 时，$y''<0$，因此曲线在 $[2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}]$ 上是凸的；

当 $2+\sqrt{3}<x<+\infty$ 时，$y''>0$，因此曲线在 $[2+\sqrt{3},+\infty)$ 上是凹的，

故曲线有三个拐点，分别为 $(-1,-1)$，$\left(2-\sqrt{3},\frac{1-\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})}\right)$，$\left(2+\sqrt{3},\frac{1+\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})}\right)$.

由于

$$\frac{\frac{1-\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})}-(-1)}{2-\sqrt{3}-(-1)}=\frac{\frac{1+\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})}-(-1)}{2+\sqrt{3}-(-1)}=\frac{1}{4},$$

故这三个拐点在一条直线上.

13. 问 a,b 为何值时，点 $(1,3)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点？

解 $y'=3ax^2+2bx, y''=6ax+2b=6a\left(x+\frac{b}{3a}\right)$.

令 $y''=0$，得 $x_0=-\frac{b}{3a}$.

当 $-\infty<x<-\frac{b}{3a}$ 时，$y''<0$，因此曲线在 $\left(-\infty,-\frac{b}{3a}\right]$ 上是凸的；

当 $-\frac{b}{3a}<x<+\infty$ 时，$y''>0$. 因此曲线在 $\left[-\frac{b}{3a},+\infty\right)$ 上是凹的；

当 $x_0=-\frac{b}{3a}$ 时，$y_0=a\left(-\frac{b}{3a}\right)^3+b\left(-\frac{b}{3a}\right)^2=\frac{2b^3}{27a^2}$. 由于 y'' 在 x_0 的两侧变号，故点 $\left(-\frac{b}{3a},\frac{2b^3}{27a^2}\right)$ 为曲线的惟一拐点.

从而要使点 $(1,3)$ 为拐点，则 $\begin{cases}-\frac{b}{3a}=1,\\ \frac{2b^3}{27a^2}=3,\end{cases}$ 解得 $a=-\frac{3}{2}, b=\frac{9}{2}$.

14. 试决定曲线 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 中的 a,b,c,d，使得 $x=-2$ 处曲线有水平切线，$(1,-10)$ 为拐点，且点 $(-2,44)$ 在曲线上.

解 $y'=3ax^2+2bx+c, y''=6ax+2b$.

根据题意有 $y(-2)=44, y'(-2)=0, y(1)=-10, y''(1)=0$，即

$$\begin{cases}-8a+4b-2c+d=44,\\12a-4b+c=0,\\a+b+c+d=-10,\\6a+2b=0.\end{cases}$$

解此方程组得 $a=1,b=-3,c=-24,d=16$.

15. 试决定 $y=k(x^2-3)^2$ 中 k 的值,使曲线的拐点处的法线通过原点.

解　$y'=2k(x^2-3)\cdot 2x=4kx(x^2-3),y''=4k(x^2-3)+4kx\cdot 2x=12k(x-1)(x+1)$.

令 $y''=0$,得 $x_1=-1,x_2=1$.

当 $-\infty<x<-1$ 时,$y''>0$,因此曲线在 $(-\infty,-1]$ 上是凹的;当 $-1<x<1$ 时,$y''<0$,因此曲线在 $[-1,1]$ 上是凸的;当 $1<x<+\infty$ 时,$y''>0$,因此曲线在 $[1,+\infty)$ 上是凹的,从而知 $(-1,4k)$,$(1,4k)$ 为曲线的拐点.

由 $y'|_{x=-1}=8k$ 知过点 $(-1,4k)$ 的法线方程为

$$Y-4k=-\frac{1}{8k}(X+1).$$

要使该法线过原点,则 $(0,0)$ 应满足这方程,将 $X=0,Y=0$ 代入上式,得

$$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}.$$

由 $y'|_{x=1}=-8k$ 知,过点 $(1,4k)$ 的法线方程为

$$Y-4k=\frac{1}{8k}(X-1).$$

同理,要使该法线过原点,将 $X=0,Y=0$ 代入上式得 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}$. 所以,当 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}$时,该曲线的拐点处的法线通过原点.

***16.** 设 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内具有三阶连续导数,如果 $f''(x_0)=0$,而 $f'''(x_0)\neq 0$,试问 $(x_0,f(x_0))$ 是否为拐点? 为什么?

解　已知 $f'''(x_0)\neq 0$,不妨设 $f'''(x_0)>0$,由于 $f'''(x)$ 在 $x=x_0$ 的某个邻域内连续,因此必存在 $\delta>0$,当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时 $f'''(x)>0$,故在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内 $f''(x)$ 单调增加. 又已知 $f''(x_0)=0$,从而当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时 $f''(x)<f''(x_0)=0$,即函数 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内的图形是凸的,当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时,$f''(x)>f''(x_0)=0$,即函数 $f(x)$ 在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内的图形是凹的,所以点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线的拐点.

习题 3-5　函数的极值与最大值最小值

1. 求下列函数的极值:

(1) $y=2x^3-6x^2-18x+7$;　　(2) $y=x-\ln(1+x)$;

(3) $y=-x^4+2x^2$;　(4) $y=x+\sqrt{1-x}$;

(5) $y=\dfrac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$;　(6) $y=\dfrac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$;

(7) $y=e^x\cos x$;　(8) $y=x^{\frac{1}{x}}$;

(9) $y=3-2(x+1)^{\frac{1}{3}}$;　(10) $y=x+\tan x$.

解　(1) $y'=6x^2-12x-18, y''=12x-12$.

令 $y'=0$ 得驻点 $x_1=-1, x_2=3$.

由 $y''|_{x=-1}=-24<0$ 知 $y|_{x=-1}=17$ 为极大值,由 $y''|_{x=3}=24>0$ 知 $y|_{x=3}=-47$为极小值.

(2) 函数的定义域为$(-1,+\infty)$,在$(-1,+\infty)$内可导,且

$$y'=1-\frac{1}{1+x},\quad y''=\frac{1}{(1+x)^2}\ (x>-1).$$

令 $y'=0$ 得驻点 $x=0$. 由 $y''|_{x=0}=1>0$ 知 $y|_{x=0}=0$ 为极小值.

(3) $y'=-4x^3+4x=-4x(x^2-1), y''=-12x^2+4$.

令 $y'=0$ 得驻点 $x_1=-1, x_2=1, x_3=0$.

由 $y''|_{x=-1}=-8<0$ 知 $y|_{x=-1}=1$ 为极大值,由 $y''|_{x=1}=-8<0$ 知 $y|_{x=1}=1$ 为极大值,由 $y''|_{x=0}=4>0$ 知 $y|_{x=0}=0$ 为极小值.

(4) 函数的定义域为$(-\infty,1]$,在$(-\infty,-1)$内可导,且

$$y'=1-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}=\frac{2\sqrt{1-x}-1}{2\sqrt{1-x}}, y''=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1-x)^{3/2}}.$$

令 $y'=0$ 得驻点 $x=\frac{3}{4}$,由 $y''|_{x=\frac{3}{4}}=-2<0$ 知 $y|_{x=\frac{3}{4}}=\frac{5}{4}$为极大值.

$$(5)\ y'=\frac{3\sqrt{4+5x^2}-(1+3x)\cdot\dfrac{10x}{2\sqrt{4+5x^2}}}{4+5x^2}=\frac{12-5x}{(4+5x^2)^{3/2}}=\frac{-5\left(x-\dfrac{12}{5}\right)}{(4+5x^2)^{3/2}}.$$

令 $y'=0$ 得驻点 $x=\frac{12}{5}$.

当 $-\infty<x<\frac{12}{5}$时,$y'>0$,因此函数在$\left(-\infty,\frac{12}{5}\right]$上单调增加;当$\frac{12}{5}<x<+\infty$ 时 $y'<0$,因此函数在$\left[\frac{12}{5},+\infty\right)$上单调减少,从而 $y\left(\frac{12}{5}\right)=\frac{\sqrt{205}}{10}$为极大值.

$$(6)\ y'=\frac{(6x+4)(x^2+x+1)-(2x+1)(3x^2+4x+4)}{(x^2+x+1)^2}=\frac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}.$$

令 $y'=0$ 得驻点 $x_1=-2, x_2=0$.

当 $-\infty<x<-2$ 时,$y'<0$,因此函数在$(-\infty,-2]$上单调减少;当 $-2<x<0$ 时,$y'>0$,因此函数在$[-2,0]$上单调增加;当 $0<x<+\infty$ 时,$y'<0$,因此函数在

$[0,+\infty)$上单调减少. 从而可知$y(-2)=\frac{8}{3}$为极小值,$y(0)=4$为极大值.

(7) $y'=e^x\cos x-e^x\sin x=e^x(\cos x-\sin x)$,$y''=-2e^x\sin x$.

令$y'=0$,得驻点$x_k=2k\pi+\frac{\pi}{4}$,$x'_k=2k\pi+\frac{5}{4}\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

由$y''\big|_{x=2k\pi+\frac{\pi}{4}}=-\sqrt{2}e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}<0$知$y\big|_{x=2k\pi+\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$为极大值.

由$y''\big|_{x'=2k\pi+\frac{5\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{2k\pi+\frac{5\pi}{4}}>0$知$y\big|_{x=2k\pi+\frac{5\pi}{4}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}e^{2k\pi+\frac{5}{4}\pi}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$为极小值.

(8) 函数的定义域为$(0,+\infty)$,在$(0,+\infty)$内可导,且

$$y'=(e^{\frac{1}{x}\ln x})'=e^{\frac{1}{x}\ln x}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x),$$

令$y'=0$,得驻点$x=e$.

当$0<x<e$时,$y'>0$,因此函数在$(0,e]$上单调增加;当$e<x<+\infty$时,$y'<0$,因此函数在$[e,+\infty)$上单调减少,从而可知$y(e)=e^{\frac{1}{e}}$为极大值.

(9) 当$x\neq-1$时,$y'=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(x+1)^{2/3}}<0$. 又$x=-1$时函数有定义. 因此可知函数在$(-\infty,+\infty)$内单调减少,从而函数在$(-\infty,+\infty)$内无极值.

(10) 由$y'=1+\sec^2x>0$知所给函数在$(-\infty,+\infty)$内单调增加,从而函数在$(-\infty,+\infty)$内无极值.

2. 试证明:如果函数$y=ax^3+bx^2+cx+d$满足条件$b^2-3ac<0$,那么这函数没有极值.

证　$y'=3ax^2+2bx+c$. 由$b^2-3ac<0$知$a\neq0,c\neq0$,y'是二次三项式,

$$\Delta=(2b)^2-4(3a)\cdot c=4(b^2-3ac)<0.$$

当$a>0$时,y'的图像开口向上,且在x轴上方,故$y'>0$,从而所给函数在$(-\infty,+\infty)$内单调增加. 当$a<0$时,y'的图像开口向下,且在x轴下方,故$y'<0$,从而所给函数在$(-\infty,+\infty)$内单调减少. 因此,只要条件$b^2-3ac<0$成立,所给函数在$(-\infty,+\infty)$内单调,故函数在$(-\infty,+\infty)$内无极值.

3. 试问a为何值时,函数$f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$在$x=\frac{\pi}{3}$处取得极值?它是极大值还是极小值?并求此极值.

解　$f'(x)=a\cos x+\cos 3x$,函数在$x=\frac{\pi}{3}$处取得极值,则$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$,即$a\cos\frac{\pi}{3}+\cos\pi=0$,故$a=2$.

又$f''(x)=-2\sin x-3\sin 3x$,$f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2\sin\frac{\pi}{3}-3\sin\pi=-\sqrt{3}<0$,因此

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}\sin\pi=\sqrt{3}$为极大值.

4. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数,且 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0)\neq0$,证明:

(1) 当 n 为奇数时,$f(x)$ 在 x_0 处不取得极值;

(2) 当 n 为偶数时,$f(x)$ 在 x_0 处取得极值,且当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时,$f(x_0)$ 为极大值,当 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时,$f(x_0)$ 为极小值.

证 由含佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式及已知条件,得

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n),$$

即 $f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$,由此式可知 $f(x)-f(x_0)$ 在 x_0 某邻域内的符号由 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 在 x_0 某邻域内的符号决定.

(1) 当 n 为奇数时,$(x-x_0)^n$ 在 x_0 两侧异号,所以 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 在 x_0 两侧异号,从而 $f(x)-f(x_0)$ 在 x_0 两侧异号,故 $f(x)$ 在 x_0 处不取得极值.

(2) 当 n 为偶数时,在 x_0 两侧 $(x-x_0)^n>0$,若 $f^{(n)}(x_0)<0$,则 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n<0$,从而 $f(x)-f(x_0)<0$,即 $f(x)<f(x_0)$,故 $f(x_0)$ 为极大值;若 $f^{(n)}(x_0)>0$,则 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n>0$,从而 $f(x)-f(x_0)>0$,即 $f(x)>f(x_0)$,故 $f(x_0)$ 为极小值.

5. 试利用习题 4 的结论,讨论函数 $f(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$ 的极值.

解 $f'(x)=e^x-e^{-x}-2\sin x$, $f''(x)=e^x+e^{-x}-2\cos x$, $f'''(x)=e^x-e^{-x}+2\sin x$, $f^{(4)}(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$,故 $f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0$, $f^{(4)}(0)=4>0$,因此函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有极小值,极小值为 4.

6. 求下列函数的最大值、最小值:

(1) $y=2x^3-3x^2$, $-1\leqslant x\leqslant4$;

(2) $y=x^4-8x^2+2$, $-1\leqslant x\leqslant3$;

(3) $y=x+\sqrt{1-x}$, $-5\leqslant x\leqslant1$.

解 (1) 函数在 $[-1,4]$ 上可导,且 $y'=6x^2-6x=6x(x-1)$.

令 $y'=0$,得驻点 $x_1=0$, $x_2=1$. 比较 $y|_{x=-1}=-5$, $y|_{x=0}=0$, $y|_{x=1}=-1$, $y|_{x=4}=80$,得函数的最大值为 $y|_{x=4}=80$,最小值为 $y|_{x=-1}=-5$.

(2) 函数在 $[-1,3]$ 上可导,且

$$y' = 4x^3 - 16x = 4x(x-2)(x+2).$$

令 $y'=0$ 得驻点 $x_1=-2$(舍去),$x_2=0$,$x_3=2$.

比较 $y|_{x=-1}=-5$,$y|_{x=0}=2$,$y|_{x=2}=-14$,$y|_{x=3}=11$,得函数的最大值为 $y|_{x=3}=11$,最小值为 $y|_{x=2}=-14$.

(3) 函数在$[-5,1)$上可导,且 $y'=1-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}=\dfrac{2\sqrt{1-x}-1}{2\sqrt{1-x}}$.

令 $y'=0$,得驻点 $x=\dfrac{3}{4}$. 比较 $y|_{x=-5}=-5+\sqrt{6}$,$y|_{x=\frac{3}{4}}=\dfrac{5}{4}$,$y|_{x=1}=1$,得函数的最大值为 $y|_{x=\frac{3}{4}}=\dfrac{5}{4}$,最小值为 $y|_{x=-5}=\sqrt{6}-5$.

7. 问函数 $y=2x^3-6x^2-18x-7\,(1\leqslant x\leqslant 4)$在何处取得最大值? 并求出它的最大值.

解　函数在$[1,4]$上可导,且 $y'=6x^2-12x-18=6(x+1)(x-3)$.

令 $y'=0$,得驻点 $x_1=-1$(舍去),$x_2=3$. 比较 $y|_{x=1}=-29$,$y|_{x=3}=-61$,$y|_{x=4}=-47$,得函数在 $x=1$ 处取得最大值,且最大值为 $y|_{x=1}=-29$.

8. 问函数 $y=x^2-\dfrac{54}{x}\,(x<0)$在何处取得最小值?

解　函数在$(-\infty,0)$内可导,且 $y'=2x+\dfrac{54}{x^2}=\dfrac{2(x^3+27)}{x^2}$,$y''=2-\dfrac{108}{x^3}$.

令 $y'=0$,得驻点 $x=-3$. 由 $y''|_{x=-3}=6>0$ 知 $x=-3$ 为极小值点. 又函数在$(-\infty,0)$内的驻点惟一,故极小值点就是最小值点,即 $x=-3$ 为最小值点,且最小值为 $y|_{x=-3}=27$.

9. 问函数 $y=\dfrac{x}{x^2+1}\,(x\geqslant 0)$在何处取得最大值?

解　函数在$[0,+\infty)$上可导,且

$$y'=\frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2},$$

$$y''=\frac{-2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}.$$

令 $y'=0$,得驻点 $x=-1$(舍去),$x=1$. 由 $y''|_{x=1}=\dfrac{-4}{8}=-\dfrac{1}{2}<0$ 知 $x=1$ 为极大值点,又函数在$[0,+\infty)$上的驻点惟一,故极大值点就是最大值点,即$x=1$ 为最大值点,且最大值为 $y|_{x=1}=\dfrac{1}{2}$.

10. 某车间靠墙壁要盖一间长方形小屋,现有存砖只够砌 20 m 长的墙壁. 问应围成怎样的长方形才能使这间小屋的面积最大?

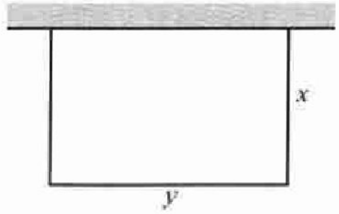


图 3－3

解　如图 3－3，设这间小屋的宽为 x，长为 y，则小屋的面积为 $S=xy$.

已知 $2x+y=20$，即 $y=20-2x$. 故

$$S=x(20-2x)=20x-2x^2,x\in(0,10).$$

$S'=20-4x,S''=-4$. 令 $S'=0$，得驻点 $x=5$. 由 $S''<0$ 知 $x=5$ 为极大值点，又驻点惟一，故极大值点就是最大值点，即当宽为 5 m，长为 10 m 时这间小屋的面积最大.

11. 要造一圆柱形油罐，体积为 V，问底半径 r 和高 h 等于多少时，才能使表面积最小？这时底直径与高的比是多少？

解　已知 $\pi r^2h=V$，即 $h=\dfrac{V}{\pi r^2}$. 圆柱形油罐的表面积

$$\begin{aligned}A&=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+2\pi r\cdot\frac{V}{\pi r^2}\\&=2\pi r^2+\frac{2V}{r},\quad r\in(0,+\infty).\end{aligned}$$

$$A'=4\pi r-\frac{2V}{r^2},\quad A''=4\pi+\frac{4V}{r^3}.$$

令 $A'=0$，得 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. 由 $A''\Big|_{r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}}=4\pi+8\pi=12\pi>0$，知 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$为极小值点，又驻点惟一，故极小值点就是最小值点. 此时 $h=\dfrac{V}{\pi r^2}=2\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}=2r$，即 $2r:h=1:1$，所以当底半径为$r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$和高 $h=2\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$时，才能使表面积最小. 这时底直径与高的比为 1∶1.

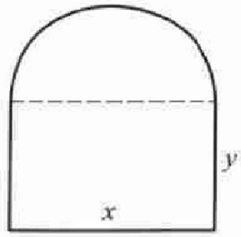


图 3－4

12. 某地区防空洞的截面拟建成矩形加半圆(图 3－4). 截面的面积为5 m^2. 问底宽 x 为多少时才能使截面的周长最小，从而使建造时所用的材料最省？

解　设截面的周长为 l，已知 $l=x+2y+\frac{\pi x}{2}$ 及 $xy+\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2=5$，即 $y=\frac{5}{x}-\frac{\pi x}{8}$. 故

$$l=x+\frac{\pi x}{4}+\frac{10}{x},\quad x\in\left(0,\sqrt{\frac{40}{\pi}}\right).$$

$$l'=1+\frac{\pi}{4}-\frac{10}{x^2},\quad l''=\frac{20}{x^3}.$$

令 $l'=0$，得驻点 $x=\sqrt{\frac{40}{4+\pi}}$. 由 $l''\Big|_{x=\sqrt{\frac{40}{4+\pi}}}=\frac{20}{\left(\frac{40}{4+\pi}\right)^{3/2}}>0$ 知 $x=\sqrt{\frac{40}{4+\pi}}$ 为极小值点，又驻点惟一，故极小值点就是最小值点. 所以当截面的底宽为 $x=\sqrt{\frac{40}{4+\pi}}$ 时，才能使截面的周长最小，从而使建造时所用的材料最省.

13. 设有质量为 5 kg 的物体，置于水平面上，受力 F 的作用而开始移动（图 3－5）. 设摩擦系数 $\mu=0.25$，问力 F 与水平线的交角 α 为多少时，才可使力 F 的大小为最小.

解　如图 3－5，力 F 的大小用 $|F|$ 表示，则由 $|F|\cos\alpha=(P-|F|\sin\alpha)\mu$ 知

$$|F|=\frac{\mu P}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha},\quad \alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right).$$

设 $y=\cos\alpha+\mu\sin\alpha$，$\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $y'=-\sin\alpha+\mu\cos\alpha$.

令 $y'=0$，得驻点 $\alpha_0=\arctan\mu$. 又 $y''\Big|_{\alpha=\alpha_0}=-\cos\alpha_0-\mu\sin\alpha_0<0$，所以驻点 α_0 为极大值点，又驻点惟一，因此 α_0 为函数 $y=y(\alpha)$ 的最大值点，这时，即 $\alpha=\alpha_0=\arctan(0.25)\approx14°2'$ 时，力 F 的大小为最小.

14. 有一杠杆，支点在它的一端. 在距支点 0.1 m 处挂一质量为 49 kg 的物体. 加力于杠杆的另一端使杠杆保持水平（图 3－6）. 如果杠杆的线密度为 5 kg/m，求最省力的杆长？

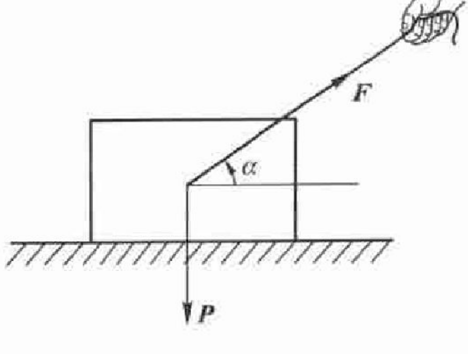


图 3－5

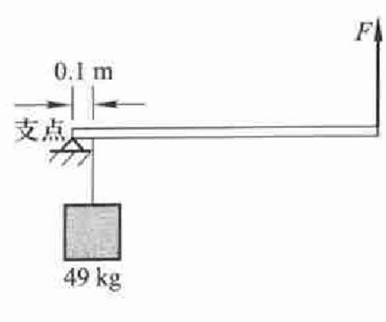


图 3－6

解　如图 3－6，设最省力的杆长为 x(m)，则此时杠杆的重力为 $5gx$，由力矩平衡公式

$$x|F|=49g\times0.1+5gx\cdot\frac{x}{2}\quad(x>0),$$

知

$$|F|=\frac{4.9}{x}g+\frac{5}{2}gx,\quad |F|'=-\frac{4.9}{x^2}g+\frac{5}{2}g,$$

$$|F|''=\frac{9.8}{x^3}g.$$

令 $|F|'=0$，得驻点 $x=1.4$. 又 $|F|''\Big|_{x=1.4}=\frac{9.8}{(1.4)^3}g>0$，故 $x=1.4$ 为极小值点，又驻点惟一，因此 $x=1.4$ 也是最小值点，即杆长为 1.4 m 时最省力.

15. 从一块半径为 R 的圆铁片上挖去一个扇形做成一个漏斗(图 3-7). 问留下的扇形的中心角 φ 取多大时，做成的漏斗的容积最大?

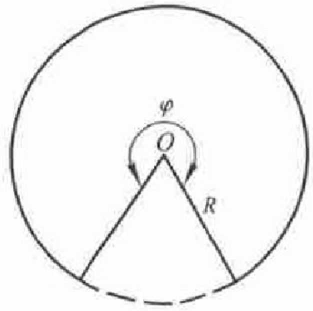


图 3-7

解　如图 3-7，设漏斗的高为 h，顶面的圆半径为 r，则漏斗的容积为 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$，又

$$2\pi r=R\varphi,\quad h=\sqrt{R^2-r^2}.$$

故

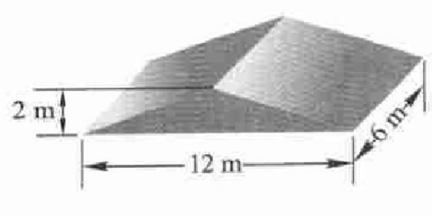
$$V=\frac{R^3}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2\varphi^4-\varphi^6}\quad(0<\varphi<2\pi),$$

$$V'=\frac{R^3}{24\pi^2}\cdot\frac{16\pi^2\varphi^3-6\varphi^5}{2\sqrt{4\pi^2\varphi^4-\varphi^6}}=\frac{R^3}{24\pi^2}\cdot\frac{8\pi^2\varphi-3\varphi^3}{\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}}.$$

令 $V'=0$ 得 $\varphi=\sqrt{\frac{8}{3}}\pi=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$. 当 $0<\varphi<\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 时，$V'>0$，故 V 在 $\left[0,\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi\right]$ 内单调增加；当 $\frac{2\sqrt{6}}{3}<\varphi<2\pi$ 时，$V'<0$，故 V 在 $\left[\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi,2\pi\right)$ 内单调减少. 因此 $\varphi=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 为极大值点，又驻点惟一，从而 $\varphi=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 也是最大值点，即当 φ 取 $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 时，做成的漏斗的容积最大.

16. 某吊车的车身高为 1.5 m，吊臂长 15 m. 现在要把一个 6 m 宽、2 m 高的屋架，水平地吊到 6 m 高的柱子上去(图 3-8)，问能否吊得上去?

解　如图 3-8，设吊臂对地面的倾角为 φ，屋架能够吊到最大的高度为 h，由



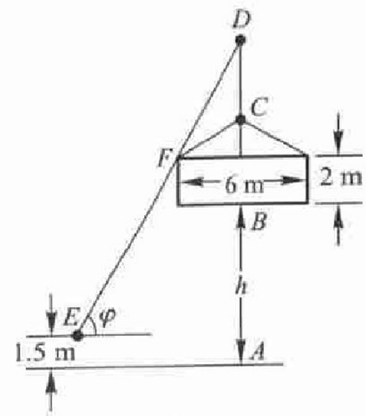


图 3-8

$15\sin\varphi = h - 1.5 + 2 + 3\tan\varphi$ 知

$$h = 15\sin\varphi - 3\tan\varphi - \frac{1}{2},$$

$$h' = 15\cos\varphi - \frac{3}{\cos^2\varphi}, \quad h'' = -15\sin\varphi - \frac{6\sin\varphi}{\cos^3\varphi}.$$

令 $h'=0$，得 $\cos\varphi = \sqrt[3]{\frac{1}{5}}$，即得惟一驻点 $\varphi_0 = \arccos\sqrt[3]{\frac{1}{5}} \approx 54°13'$. 又 $h''\Big|_{\varphi=\varphi_0} < 0$，故 $\varphi_0 \approx 54°13'$ 为极大值点也是最大值点. 即当 $\varphi_0 \approx 54°13'$ 时，h 达到最大值 $h_0 = 15\sin 54°13' - 3\tan 54°13' - \frac{1}{2} \approx 7.506$ m，而柱子高只有 6 m，所以能吊得上去.

17. 一房地产公司有 50 套公寓要出租. 当月租金定为 4 000 元时，公寓会全部租出去. 当月租金每增加 200 元时，就会多一套公寓租不出去. 而租出去的公寓平均每月需花费 400 元的维修费. 试问房租定为多少时可获得最大收入？

解　设每套月房租为 x 元，则租不出去的房子套数为 $\frac{x-4\,000}{200} = \frac{x}{200} - 20$，租出去的套数为 $50 - \left(\frac{x}{200} - 20\right) = 70 - \frac{x}{200}$，租出的每套房子获利 $(x-400)$ 元. 故总利润为

$$y = \left(70 - \frac{x}{200}\right)(x - 400) = -\frac{x^2}{200} + 72x - 28\,000.$$

$$y' = -\frac{x}{100} + 72, \quad y'' = \frac{-1}{100}.$$

令 $y'=0$，得驻点 $x = 7\,200$. 由 $y''<0$ 知 $x = 7\,200$ 为极大值点，又驻点惟一，这极大值点就是最大值点. 即当每套月房租定在 7 200 元时，可获得最大收入.

18. 已知制作一个背包的成本为 40 元，如果每一个背包的售出价为 x 元，售出的背包数由

$$n=\frac{a}{x-40}+b(80-x)$$

给出,其中 a,b 为正常数. 问什么样的售出价格能带来最大利润?

解 设利润函数为 $p(x)$,则

$$p(x)=(x-40)n=a+b(x-40)(80-x),$$

$$p'(x)=b(120-2x),$$

令 $p'(x)=0$,得 $x=60$(元). 由 $p''(x)=-2b<0$ 知 $x=60$ 为极大值点,又驻点惟一,这极大值点就是最大值点,即售出价格定在 60 元时能带来最大利润.

习题 3-6 函数图形的描绘

描绘下列函数的图形:

1. $y=\frac{1}{5}(x^4-6x^2+8x+7)$;

2. $y=\frac{x}{1+x^2}$;

3. $y=e^{-(x-1)^2}$;

4. $y=x^2+\frac{1}{x}$;

5. $y=\frac{\cos x}{\cos 2x}$.

解 1. (1) 所给函数 $y=\frac{1}{5}(x^4-6x^2+8x+7)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 而

$$y'=\frac{1}{5}(4x^3-12x+8)=\frac{4}{5}(x+2)(x-1)^2,y''=\frac{4}{5}(3x^2-3)=\frac{12}{5}(x+1)(x-1).$$

(2) 令 $y'=0$,得 $x=-2,x=1$,令 $y''=0$,得 $x=1,x=-1$. 根据上述点将区间 $(-\infty,+\infty)$ 分成下列四个部分区间:

$$(-\infty,-2],[-2,-1],[-1,1],[1,+\infty).$$

(3) 在各部分区间内 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的符号、相应曲线弧的升降及凹凸以及拐点等如下表:

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$-$	0	+	+	+	0	+
y''	+	+	+	0	$-$	0	+
$y=f(x)$ 的图形		$\left(-2,-\frac{17}{5}\right)$		拐点		拐点	

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$,图形没有铅直、水平、斜渐近线.

(5) 由 $f(-2)=-\frac{17}{5},f(-1)=-\frac{6}{5},f(1)=2,f(0)=\frac{7}{5}$ 得图形上的四个点

$\left(-2,-\frac{17}{5}\right),\left(-1,-\frac{6}{5}\right),(1,2),\left(0,\frac{7}{5}\right)$.

(6) 作图如图 3 -9.

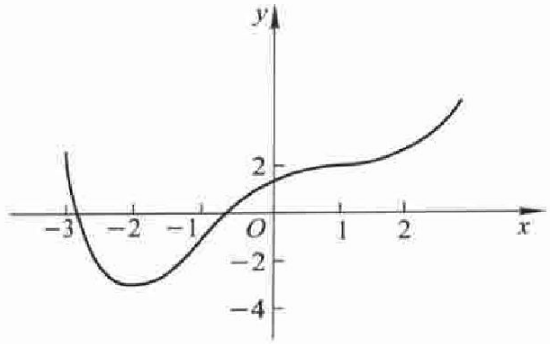


图 3 -9

2. (1) 所给函数 $y=\frac{x}{1+x^2}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 由于 $y=\frac{x}{1+x^2}$ 是奇函数,它的图形关于原点对称,因此可以只讨论 $[0,+\infty)$ 上该函数的图形,求出

$$y'=\frac{1+x^2-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},$$

$$y''=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

(2) 在 $[0,+\infty)$ 内,y' 的零点为 $x=1$,y'' 的零点为 $x=\sqrt{3}$,根据这两点把区间 $[0,+\infty)$ 分成三个区间:$[0,1]$,$[1,\sqrt{3}]$,$[\sqrt{3},+\infty)$.

(3) 在 $[0,+\infty)$ 内的各部分区间内 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的符号、相应曲线弧的升降及凹凸以及拐点等如下表:

x	0	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y'	+	+	0	−	−	−
y''	−	−	−	−	0	+
$y=f(x)$ 的图形	拐点		$\left(1,\frac{1}{2}\right)$		拐点	

(4) 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{1+x^2}=0$,所以图形有一条水平渐近线 $y=0$,图形无铅直渐近线及斜渐近线.

(5) 由 $f(0)=0$,$f(1)=\frac{1}{2}$,$f(\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{4}$ 得在 $[0,+\infty)$ 内图形上的点 $(0,0)$,$\left(1,\frac{1}{2}\right)$,$\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

(6) 利用图形的对称性,作出图形如图 3 -10.

3. (1) 所给函数 $y=e^{-(x-1)^2}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,而

$$y'=-2(x-1)e^{-(x-1)^2},$$

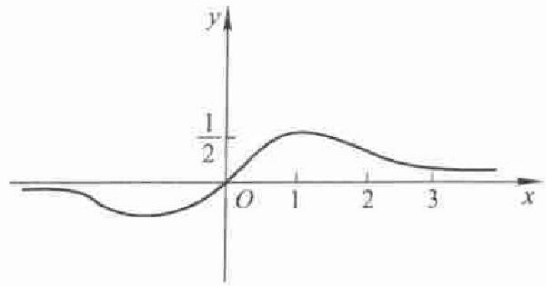


图 3 - 10

$$y''=-4(2x^2-4x+1)e^{-(x-1)^2}.$$

(2) 令 $y'=0$,得驻点 $x=1$;令 $y''=0$,得 $x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}, x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$,根据上述点将区间 $(-\infty,+\infty)$ 分成四个部分区间:

$$\left(-\infty,1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right],\left[1-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right],\left[1,1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right],\left[1+\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right).$$

(3) 在各部分区间内 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的符号,相应曲线弧的升降及凹凸以及拐点等如下表:

x	$\left(-\infty,1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$	1	$\left(1,1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$
y'	+	+	+	0	−	−	−
y''	+	0	−	−	−	0	+
$y=f(x)$ 的图形		拐点		(1,1)		拐点	

(4) 由 $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-(x-1)^2}=0$ 知图形有一条水平渐近线 $y=0$,图形无铅直渐近线及斜渐近线.

(5) 由 $f(1)=1, f\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=e^{-\frac{1}{2}}, f(0)=e^{-1}, f\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=e^{-\frac{1}{2}}$,得图形上的点 $(1,1),\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2},e^{-\frac{1}{2}}\right),(0,e^{-1}),\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2},e^{-\frac{1}{2}}\right)$.

(6) 作图如图 3 - 11.

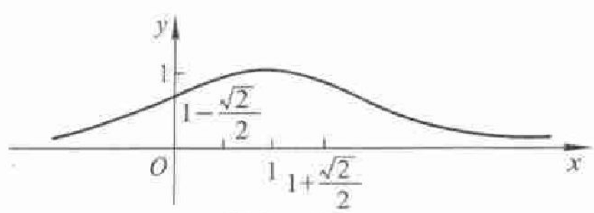


图 3 - 11

4. (1) 所给函数 $y=x^2+\frac{1}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

$$y'=2x-\frac{1}{x^2},\quad y''=2+\frac{2}{x^3}.$$

(2) 令 $y'=0$，得 $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$；令 $y''=0$，得 $x=-1$，又 $x=0$ 时函数无定义，根据上述点，将区间 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 分成四个部分区间：$(-\infty,-1]$，$[-1,0)$，$\left(0,\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]$，$\left[\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}},+\infty\right)$.

(3) 在各部分区间内 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的符号，相应曲线弧的升降及凹凸以及拐点等如下表：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$\left(0,\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}},+\infty\right)$
y'	$-$	$-$	$-$		$-$	0	$+$
y''	$+$	0	$-$		$+$	$+$	$+$
$y=f(x)$ 的图形		拐点				$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}\right)$	

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)=\infty$，所以图形有一条铅直渐近线 $x=0$，图形无水平、斜渐近线.

(5) 由 $f(-1)=0$，$f\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}$ 得在 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 内图形上的点 $(-1,0)$，$\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}},\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}\right)$.

(6) 作图如图 3-12.

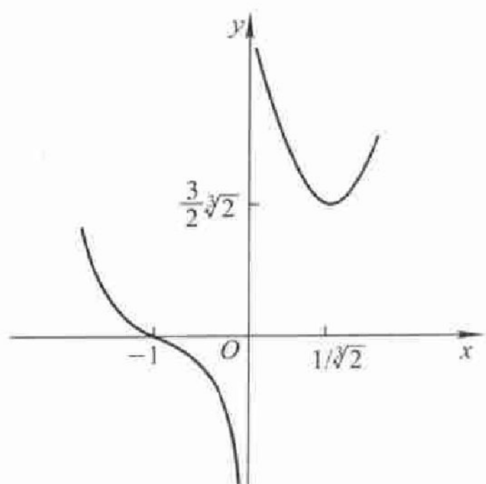


图 3-12

5. (1) 所给函数 $y=\dfrac{\cos x}{\cos 2x}$ 的定义域 $D=\left\{x \mid x\neq\dfrac{n\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}, x\in\mathbf{R}, n=0,\pm1,\pm2,\cdots\right\}$.

由于 $y=\dfrac{\cos x}{\cos 2x}$ 是偶函数，它的图形关于 y 轴对称，且由于函数是以 2π 为周期的函数，因此可以只讨论$[0,\pi]$部分的图形. 求出

$$y'=\frac{-\sin x\cos 2x+\cos x\cdot 2\sin 2x}{\cos^2(2x)}=\frac{\sin x(3-2\sin^2 x)}{\cos^2(2x)},$$

$$y''=\frac{\cos x(3+12\sin^2 x-4\sin^4 x)}{\cos^3(2x)}.$$

(2) 令 $y'=0$，得 $x=0,x=\pi$；令 $y''=0$，得 $x=\dfrac{\pi}{2}$；又函数在点 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 及 $x=\dfrac{3}{4}\pi$ 处无定义. 根据这些点把区间$[0,\pi]$分成四个部分区间：$\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$，$\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right)$，$\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right]$.

(3) 在$[0,\pi]$内的各部分区间内 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的符号，相应曲线弧的升降及凹凸以及拐点等如下表：

x	0	$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\pi}{4}$	$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$	$\frac{3\pi}{4}$	$\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$	π
y'	0	+		+	+	+		+	0
y''	+	+		−	+	+		−	−
$y=f(x)$ 的图形	$(0,1)$				拐点				$(\pi,-1)$

(4) 由 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}f(x)=\infty$ 及 $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}}f(x)=\infty$，知图形有两条铅直渐近线：$x=\dfrac{\pi}{4}$ 及 $x=\dfrac{3}{4}\pi$，图形无水平及斜渐近线.

(5) 由 $f(0)=1,f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ 得图形上的点$(0,1)$，$\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$.

(6) 利用图形对称性及函数的周期性，作图如图 3－13.

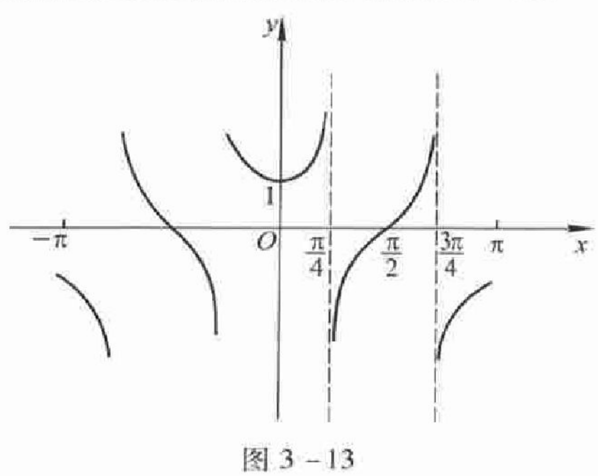


图 3－13

习题 3－7　曲率

1. 求椭圆 $4x^2+y^2=4$ 在点(0,2)处的曲率.

解　由 $8x+2yy'=0$ 知 $y'=\frac{-4x}{y}$, $y''=\frac{-16}{y^3}$. 故 $y'|_{x=0}=0$, $y''|_{x=0}=-2$, 故在点(0,2)处的曲率为

$$K=\left.\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_{(0,2)}=2.$$

2. 求曲线 $y=\ln\sec x$ 在点 (x,y) 处的曲率及曲率半径.

解　$y'=\frac{1}{\sec x}\cdot\sec x\tan x=\tan x$, $y''=\sec^2 x$. 故曲率

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{\sec^2 x}{(1+\tan^2 x)^{3/2}}=|\cos x|,$$

曲率半径 $\rho=\frac{1}{K}=|\sec x|$.

3. 求抛物线 $y=x^2-4x+3$ 在其顶点处的曲率及曲率半径.

解　抛物线的顶点为 $(2,-1)$, $y'=2x-4$, $y''=2$.

抛物线 $y=x^2-4x+3$ 在其顶点处的曲率

$$K=\left.\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}\right|_{(2,-1)}=2,$$

曲率半径 $\rho=\frac{1}{K}=\frac{1}{2}$.

4. 求曲线 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ 在 $t=t_0$ 处的曲率.

解　$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}=-\tan t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t}=\frac{1}{3a\sin t\cos^4 t}.$$

故曲线在 $t=t_0$ 处的曲率为

$$K=\left.\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}\right|_{t=t_0}=\left.\frac{\left|\frac{1}{3a\sin t\cos^4 t}\right|}{[1+(-\tan t)^2]^{3/2}}\right|_{t=t_0}=\frac{2}{|3a\sin(2t_0)|}.$$

5. 对数曲线 $y=\ln x$ 上哪一点处的曲率半径最小？求出该点处的曲率半径.

解　$y'=\frac{1}{x}$, $y''=-\frac{1}{x^2}$. 曲线的曲率

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\left|-\frac{1}{x^2}\right|}{\left[1+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right]^{3/2}}=\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}},$$

曲率半径为

$$\rho=\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x}.$$

又 $\rho'=\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}(2x^2-1)}{x^2}$. 令 $\rho'=0$ 得驻点 $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}, x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$(舍去).

当 $0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$\rho'<0$，即 ρ 在 $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上单调减少；当 $\frac{\sqrt{2}}{2}<x<+\infty$ 时，$\rho'>0$，即 ρ 在 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 上单调增加. 因此在 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 处 ρ 取得极小值；驻点惟一，从而 ρ 的极小值就是最小值，因此最小的曲率半径为

$$\rho\Big|_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

6. 证明曲线 $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ 在点 (x,y) 处的曲率半径为 $\frac{y^2}{a}$.

证　$y'=\operatorname{sh}\frac{x}{a}, y''=\frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}$，曲线在点 (x,y) 处的曲率为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\left|\frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}\right|}{\left(1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{a\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}},$$

曲率半径为 $\rho=\frac{1}{K}=a\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}=\frac{y^2}{a}$.

7. 一飞机沿抛物线路径 $y=\frac{x^2}{10\,000}$(y 轴铅直向上，单位为 m)作俯冲飞行. 在坐标原点 O 处飞机的速度为 $v=200$ m/s，飞行员体重 $G=70$ kg. 求飞机俯冲至最低点即原点 O 处时座椅对飞行员的反力.

解　$y'=\frac{2x}{10\,000}=\frac{x}{5\,000}, y''=\frac{1}{5\,000}$.

抛物线在坐标原点的曲率半径为

$$\rho=\frac{1}{K}\Big|_{x=0}=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}\Big|_{x=0}=5\,000.$$

所以向心力为 $F_1=\dfrac{mv^2}{\rho}=\dfrac{70\times200^2}{5\,000}=560(\mathrm{N})$.

座椅对飞行员的反力 F 等于飞行员的离心力及飞行员本身的重量对座椅的压力之和，因此

$$F=mg+F_1=70\times9.8+560=1\,246(\mathrm{N}).$$

8. 汽车连同载重共 5 t，在抛物线拱桥上行驶，速度为 21.6 km/h，桥的跨度为 10 m，拱的矢高为 0.25 m（图 3－14）. 求汽车越过桥顶时对桥的压力.

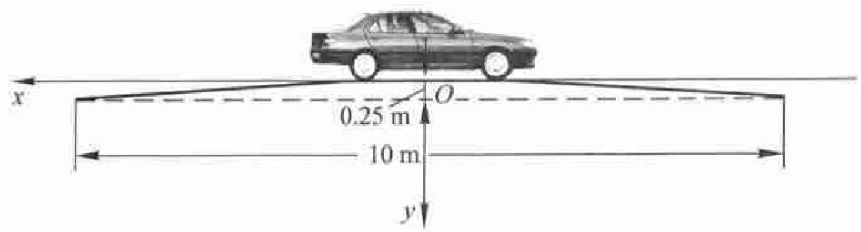


图 3－14

解　设立直角坐标系如图 3－14 所示，设抛物线拱桥方程为

$$y=ax^2.$$

由于抛物线过点(5,0.25)，代入方程得 $a=\dfrac{y}{x^2}\Big|_{(5,0.25)}=\dfrac{0.25}{25}=0.01$.

$$y'=2ax,\quad y''=2a,$$

因此

$$y'\Big|_{x=0}=0,y''\Big|_{x=0}=0.02,$$

$$\rho\Big|_{x=0}=\frac{1}{K}\Big|_{x=0}=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}\Bigg|_{x=0}=50.$$

汽车越过桥顶点时对桥的压力为

$$F=mg-\frac{mv^2}{\rho}=5\times10^3\times9.8-\frac{5\times10^3\times\left(\dfrac{21.6\times10^3}{3\,600}\right)^2}{50}=45\,400(\mathrm{N}).$$

***9.** 求曲线 $y=\ln x$ 在与 x 轴交点处的曲率圆方程.

解　解方程组 $\begin{cases}y=\ln x,\\ y=0,\end{cases}$ 得曲线与 x 轴的交点为(1,0).

$$y'=\frac{1}{x},y''=-\frac{1}{x^2},\quad 故\ y'|_{x=1}=1,y''\Big|_{x=1}=-1.$$

设曲线在点(1,0)处的曲率中心为(α,β)，则

$$\alpha=\left[x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}\right]_{(1,0)}=1-\frac{1\cdot(1+1^2)}{-1}=3,$$

$$\beta=\left[y+\frac{1+y'^2}{y''}\right]_{(1,0)}=0+\frac{1+1^2}{-1}=-2.$$

曲率半径

$$\rho=\frac{1}{K}\bigg|_{x=1}=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}\bigg|_{x=1}=\frac{(1+1^2)^{\frac{3}{2}}}{1}=\sqrt{8},$$

因此所求的曲率圆方程为$(\xi-3)^2+(\eta+2)^2=8$.

*10. 求曲线 $y=\tan x$ 在点$\left(\frac{\pi}{4},1\right)$处的曲率圆方程.

解 $y'=\sec^2 x, y''=2\sec^2 x\tan x$,故 $y'|_{x=\frac{\pi}{4}}=2, y''|_{x=\frac{\pi}{4}}=4$.

设曲线在点$\left(\frac{\pi}{4},1\right)$处的曲率中心的坐标为$(\alpha,\beta)$,则

$$\alpha=\left[x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}\right]_{\left(\frac{\pi}{4},1\right)}=\frac{\pi}{4}-\frac{2(1+4)}{4}=\frac{\pi-10}{4},$$

$$\beta=\left[y+\frac{1+y'^2}{y''}\right]_{\left(\frac{\pi}{4},1\right)}=1+\frac{1+4}{4}=\frac{9}{4}.$$

曲率半径

$$\rho=\frac{1}{K}\bigg|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}\bigg|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{5^{\frac{3}{2}}}{4},$$

因此所求的曲率圆方程为$\left(\xi-\frac{\pi-10}{4}\right)^2+\left(\eta-\frac{9}{4}\right)^2=\frac{125}{16}$.

*11. 求抛物线 $y^2=2px$ 的渐屈线方程.

解 由 $2yy'=2p$,及 $y'^2+yy''=0$ 知 $y'=\frac{p}{y}, y''=-\frac{p^2}{y^3}$.

故抛物线 $y^2=2px$ 的渐屈线方程为

$$\begin{cases}\alpha=x-\dfrac{y'(1+y'^2)}{y''}=x-\dfrac{\frac{p}{y}\left[1+\left(\frac{p}{y}\right)^2\right]}{-\frac{p^2}{y^3}}=\dfrac{3y^2}{2p}+p,\\ \beta=y+\dfrac{1+y'^2}{y''}=y+\dfrac{1+\left(\frac{p}{y}\right)^2}{-\frac{p^2}{y^3}}=-\dfrac{y^3}{p^2},\end{cases}$$

其中 y 为参数,消去参数 y 得渐屈线方程为

$$27p\beta^2=8(\alpha-p)^3.$$

习题 3-8 方程的近似解

1. 试证明方程 $x^3-3x^2+6x-1=0$ 在区间$(0,1)$内有惟一的实根,并用二分法求这个根的近似值,使误差不超过 0.01.

解 设函数 $f(x)=x^3-3x^2+6x-1$,$f(x)$在$[0,1]$上连续,且$f(0)=-1<0$,

$f(1)=3>0$. 由零点定理知至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)=0$，即方程 $x^3-3x^2+6x-1=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

又 $f'(x)=3x^2-6x+6=3(x-1)^2+3>0$，故函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调增加，从而方程 $f(x)=0$，即 $x^3-3x^2+6x-1=0$ 在 $(0,1)$ 内至多有一个实根. 因此方程 $x^3-3x^2+6x-1=0$ 在 $(0,1)$ 内有惟一的实根.

现用二分法求这个实根的近似值：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_n	0	0	0	0.125	0.125	0.157	0.173	0.180	0.180	0.182	0.183
b_n	1	0.5	0.25	0.25	0.188	0.188	0.188	0.188	0.184	0.184	0.184
中点 x_n	0.5	0.25	0.125	0.188	0.157	0.173	0.180	0.184	0.182	0.183	0.183
$f(x_n)$ 的符号	+	+	−	+	−	−	−	+	−	+	+

故使误差不超过 0.01 的根的近似值为 $\xi=0.183$.

2. 试证明方程 $x^5+5x+1=0$ 在区间 $(-1,0)$ 内有惟一的实根，并用切线法求这个根的近似值，使误差不超过 0.01.

解　设函数 $f(x)=x^5+5x+1$. $f(x)$ 在 $[-1,0]$ 上连续，且 $f(-1)=-5<0$，$f(0)=1>0$. 由零点定理知至少存在一点 $\xi\in(-1,0)$，使 $f(\xi)=0$ 即方程 $x^5+5x+1=0$ 在区间 $(-1,0)$ 内至少有一实根.

又 $f'(x)=5x^4+5>0$，故函数 $f(x)$ 在 $[-1,0]$ 上单调增加，从而方程 $f(x)=0$ 即 $x^5+5x+1=0$ 在 $(-1,0)$ 内至多有一个实根，因此方程 $x^5+5x+1=0$ 在区间 $(-1,0)$ 内有惟一的实根.

现用切线法求这个实根的近似值：

由 $f''(x)=20x^3$，$f''(-1)=-20<0$ 知取 $x_0=-1$，利用递推公式 $x_n=x_{n-1}-\dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$，得：

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=-1-\frac{f(-1)}{f'(-1)}=-0.5,$$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=-0.5-\frac{f(-0.5)}{f'(-0.5)}\approx-0.21,$$

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}=-0.21-\frac{f(-0.21)}{f'(-0.21)}\approx-0.20,$$

$$x_4=x_3-\frac{f(x_3)}{f'(x_3)}=-0.20-\frac{f(-0.20)}{f'(-0.20)}\approx-0.20.$$

故使误差不超过 0.01 的根的近似值为 $\xi=-0.20$.

3. 用割线法求方程 $x^3+3x-1=0$ 的近似根，使误差不超过 0.01.

解　设 $f(x)=x^3+3x-1$，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=-1<0$，$f(1)=3>0$，由零点定理知至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)=0$；又 $f'(x)=3x^2+3>0$，故 $f(x)$ 在

$[0,1]$上单调增加,从而方程 $f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内有惟一实根.

现用割线法求这个根的近似值:

由 $f''(x)=6x, f''(1)=6>0$ 知取 $x_0=1$. 又取 $x_1=0.8$,利用递推公式 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}\cdot f(x_n)$,得:

$$x_2=x_1-\frac{x_1-x_0}{f(x_1)-f(x_0)}\cdot f(x_1)=0.8-\frac{0.8-1}{f(0.8)-f(1)}\cdot f(0.8)\approx 0.449,$$

$$x_3=x_2-\frac{x_2-x_1}{f(x_2)-f(x_1)}\cdot f(x_2)=0.449-\frac{0.449-0.8}{f(0.449)-f(0.8)}\cdot f(0.449)\approx 0.345,$$

$$x_4=x_3-\frac{x_3-x_2}{f(x_3)-f(x_2)}\cdot f(x_3)=0.345-\frac{0.345-0.449}{f(0.345)-f(0.449)}\cdot f(0.345)\approx 0.323,$$

$$x_5=x_4-\frac{x_4-x_3}{f(x_4)-f(x_3)}\cdot f(x_4)=0.323-\frac{0.323-0.345}{f(0.323)-f(0.345)}\cdot f(0.323)\approx 0.322.$$

至此,计算无需再继续,因 x_4 与 x_5 的前两位小数相同,故以 0.32 作为根的近似值,其误差小于 0.01.

4. 求方程 $x\lg x=1$ 的近似根,使误差不超过 0.01.

解　设函数 $f(x)=x\lg x-1$. $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上连续,且

$$f(1)=-1<0,\quad f(3)=3\lg 3-1>0,$$

由零点定理知至少存在一点 $\xi\in(1,3)$,使 $f(\xi)=0$,即方程 $x\lg x=1$ 在区间 $(1,3)$ 内至少有一实根.

又 $f'(x)=\lg x+x\cdot\dfrac{1}{x\ln 10}=\lg x+\dfrac{1}{\ln 10}>0\ (x\geqslant 1)$,故函数 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上单调增加,从而方程 $f(x)=0$,即 $x\lg x=1$ 在 $(1,3)$ 内至多有一个实根,因此方程 $x\lg x=1$ 在 $(1,3)$ 内有惟一的实根.

现用二分法求这个根的近似值:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	1	2	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50
b_n	3	3	3	2.75	2.63	2.57	2.53	2.52	2.51
中点 x_n	2	2.50	2.75	2.63	2.57	2.53	2.52	2.51	2.51
$f(x_n)$ 的符号	−	−	+	+	+	+	+	+	+

故误差不超过 0.01 的根的近似值为 $\xi=2.51$.

总习题三

1. 填空：

设常数 $k>0$，函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{\mathrm{e}}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内零点的个数为________.

解　$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}=\dfrac{\mathrm{e}-x}{x\mathrm{e}}$，令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=\mathrm{e}$.

当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$f'(x)>0$，故函数 $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e}]$ 上单调增加；当 $\mathrm{e}<x<+\infty$ 时，$f'(x)<0$，故函数 $f(x)$ 在 $[\mathrm{e},+\infty)$ 上单调减少. 从而 $x=\mathrm{e}$ 为函数 $f(x)$ 的极大值点. 由于驻点惟一，极大值也是最大值且最大值 $f(\mathrm{e})=k>0$. 又

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty,$$

故曲线 $y=\ln x-\dfrac{x}{\mathrm{e}}+k$ 与 x 轴有两个交点，因此函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{\mathrm{e}}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内的零点的个数为 2.

2. 以下两题中给出了四个结论，从中选出一个正确的结论：

(1) 设在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$，则 $f'(0)$, $f'(1)$, $f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 几个数的大小顺序为(　　).

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$　　(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　　(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

(2) 设 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$, $f'''(x_0)>0$，则(　　).

(A) $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值　　(B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(C) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值　　(D) $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

解　(1) 由拉格朗日中值定理知 $f(1)-f(0)=f'(\xi)$，其中 $\xi\in(0,1)$. 由于 $f''(x)>0$，$f'(x)$ 单调增加，故 $f'(0)<f'(\xi)<f'(1)$. 即

$$f'(0)<f(1)-f(0)<f'(1).$$

因此应填(B).

(2) 解法一　取 $f(x)=x^3$, $f'(x)=3x^2$, $f''(x)=6x$, $f'''(x)=6>0$, $x_0=0$，符合题意，但明显排除(A)、(B)、(C). 因此应填(D).

解法二　由已知条件及 $f'''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)}{x-x_0}>0$ 知，在 x_0 某邻域内，当 $x<x_0$ 时，$f''(x)<0$；当 $x>x_0$ 时，$f''(x)>0$，所以 $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

由此可知，在 x_0 的某去心邻域内有 $f'(x)>f'(x_0)=0$，所以 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是单调增加的，从而 $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值. 再由已知条件及极值的第二充分判别

法知,$f'(x_0)$是$f'(x)$的极小值.综上所述,本题只能选(D).

3. 列举一个函数$f(x)$满足:$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内除某一点外处处可导,但在(a,b)内不存在点ξ,使$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

解 取$f(x)=|x|$,区间为$[-1,1]$.函数$f(x)$在$[-1,1]$上连续,在$(-1,1)$内除点$x=0$外处处可导,但$f(x)$在$(-1,1)$内不存在点ξ,使$f'(\xi)=0$,即不存在$\xi\in(-1,1)$,使$f(1)-f(-1)=f'(\xi)[1-(-1)]$.

4. 设$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=k$,求$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)]$.

解 由拉格朗日中值定理知

$$f(x+a)-f(x)=f'(\xi)a,$$

ξ介于x与$x+a$之间,当$x\to\infty$时,$\xi\to\infty$.故

$$\lim_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)]=\lim_{\xi\to\infty}f'(\xi)a=ka.$$

5. 证明多项式$f(x)=x^3-3x+a$在$[0,1]$上不可能有两个零点.

证 假设多项式$f(x)=x^3-3x+a$在$[0,1]$上有两个零点,即存在$x_1,x_2\in[0,1]$,使$f(x_1)=f(x_2)=0$,不妨设$x_1<x_2$.

函数$f(x)$在$[x_1,x_2]$上连续,在(x_1,x_2)内可导,由罗尔定理知至少存在一点$\xi\in(x_1,x_2)\subset(0,1)$,使$f'(\xi)=0$,但$f'(x)=3x^2-3$在$(0,1)$内恒不等于零,故多项式$f(x)=x^3-3x+a$在$[0,1]$上不可能有两个零点.

6. 设$a_0+\dfrac{a_1}{2}+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}=0$,证明多项式$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$在$(0,1)$内至少有一个零点.

证 取函数$F(x)=a_0x+\dfrac{a_1}{2}x^2+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}x^{n+1}$. $F(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且$F(0)=0$,$F(1)=a_0+\dfrac{a_1}{2}+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}=0$,由罗尔定理知至少存在一点$\xi\in(0,1)$,使$F'(\xi)=0$,即多项式$f(x)=F'(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$在$(0,1)$内至少有一个零点.

7. 设$f(x)$在$[0,a]$上连续,在$(0,a)$内可导,且$f(a)=0$,证明存在一点$\xi\in(0,a)$,使$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

证 取函数$F(x)=xf(x)$. $F(x)$在$[0,a]$上连续,在$(0,a)$内可导,且$F(0)=0$,$F(a)=af(a)=0$,由罗尔定理知至少存在一点$\xi\in(0,a)$,使

$$F'(\xi)=[xf(x)]'|_{x=\xi}=f(\xi)+\xi f'(\xi)=0.$$

*8. 设$0<a<b$,函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,试利用柯西中值定理,证明存在一点$\xi\in(a,b)$,使

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}.$$

证 取函数 $F(x)=\ln x$，$f(x)$、$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F'(x)=\frac{1}{x}\neq 0, x\in(a,b)$. 由柯西中值定理知至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

即

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}},$$

亦即 $f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$.

9. 设 $f(x)$，$g(x)$ 都是可导函数，且 $|f'(x)|<g'(x)$，证明：当 $x>a$ 时，

$$|f(x)-f(a)|<g(x)-g(a).$$

分析 要证 $x>a$ 时，$|f(x)-f(a)|<g(x)-g(a)$，即要证

$$-[g(x)-g(a)]<f(x)-f(a)<g(x)-g(a),$$

亦即要证

$$f(x)-g(x)<f(a)-g(a),$$
$$f(x)+g(x)>f(a)+g(a).$$

证 取 $F(x)=f(x)-g(x)$，$G(x)=f(x)+g(x)$，$x\in(a,+\infty)$. 由 $|f'(x)|<g'(x)$ 知

$$f'(x)-g'(x)<0,\quad f'(x)+g'(x)>0,$$

故 $F'(x)=f'(x)-g'(x)<0$，$G'(x)=f'(x)+g'(x)>0$，即当 $x>a$ 时函数 $F(x)$ 单调减少，$G(x)$ 单调增加. 因此

$$F(x)<F(a),\quad G(x)>G(a)\ (x>a).$$

从而

$$f(x)-g(x)<f(a)-g(a), f(x)+g(x)>f(a)+g(a)\quad (x>a).$$

即当 $x>a$ 时，$|f(x)-f(a)|<g(x)-g(a)$.

10. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}[(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})/n]^{nx}$ （其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$）.

解 (1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x^x(1+\ln x)}{-1+\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^x\ln x+x^x-1}{x-1}\cdot x$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^x(\ln x+1)\ln x+x^{x-1}+x^x(\ln x+1)}{1}$$

$$=2.$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1}{2}.$$

(3) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)},$$而

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{2}{\pi}+\ln\arctan x}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{-x^2}{1+x^2}\right)=-\frac{2}{\pi},$$

故$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x=e^{-\frac{2}{\pi}}$.

(4) $$\lim_{x\to\infty}\left[\left(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\right)/n\right]^{nx}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}nx\left[\ln\left(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\right)-\ln n\right]},$$

而

$$\lim_{x\to\infty}nx\left[\ln\left(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\right)-\ln n\right]$$

$$=n\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\right)-\ln n}{\frac{1}{x}}$$

$$=n\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}\left[a_1^{\frac{1}{x}}\ln a_1+a_2^{\frac{1}{x}}\ln a_2+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\ln a_n\right]\left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

$$=n\cdot\frac{1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)=\ln(a_1a_2\cdots a_n),$$

故$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\right)/n\right]^{nx}=a_1a_2\cdots a_n$.

11. 求下列函数在指定的x_0处具有指定阶数及余项的泰勒公式:

(1) $f(x)=x^3\ln x, x_0=1, n=4$，拉格朗日余项；

(2) $f(x)=\arctan x, x_0=0, n=3$，佩亚诺余项；

(3) $f(x)=e^{\sin x}, x_0=0, n=3$，佩亚诺余项；

(4) $f(x)=\ln\cos x, x_0=0, n=6$，佩亚诺余项.

解　(1) $f(1)=0, f'(x)=3x^2\ln x+x^2, f'(1)=1$；

$f''(x)=6x\ln x+5x, f''(1)=5$；$f'''(x)=6\ln x+11, f'''(1)=11$；

$f^{(4)}(x)=\dfrac{6}{x}, f^{(4)}(1)=6$；$f^{(5)}(x)=-\dfrac{6}{x^2}, f^{(5)}(\xi)=-\dfrac{6}{\xi^2}$，

因此，

$$x^3\ln x=(x-1)+\frac{5}{2!}(x-1)^2+\frac{11}{3!}(x-1)^3+\frac{6}{4!}(x-1)^4-\frac{6}{5!\xi^2}(x-1)^5,$$

其中 ξ 介于 1 和 x 之间.

(2) $f(0)=0, f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}, f'(0)=1$；$f''(x)=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}, f''(0)=0$；$f'''(x)=-\dfrac{2(1-3x^2)}{(1+x^2)^3}, f'''(0)=-2$；

因此，

$$\arctan x=x-\frac{x^2}{3}+o(x^4).$$

注：也可用下列方法求 $y=\arctan x$ 在 $x=0$ 处的导数.

对 $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$，即 $(1+x^2)y'=1$，求 n 阶导数：

$$(1+x^2)y^{(n+1)}+2nxy^{(n)}+n(n-1)y^{(n-1)}=0,$$

令 $x=0$ 得

$$y^{(n+1)}(0)=-n(n-1)y^{(n-1)}(0),$$

由 $y''(0)=0, y'(0)=1$ 得

$$y^{(2m)}(0)=0,$$

$$y^{(2m+1)}(0)=-2m(2m-1)y^{(2m-1)}(0)=(-1)(2m)!.$$

(3) $e^{\sin x}=1+\sin x+\dfrac{1}{2!}\sin^2 x+\dfrac{1}{3!}\sin^3 x+o(x^3)$，又，$\sin x=x-\dfrac{1}{3!}x^3+o(x^4)$，故

$$e^{\sin x}=1+\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)=1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^3).$$

(4) $\ln\cos x=\ln[1+(\cos x-1)]=\cos x-1-\dfrac{1}{2}(\cos x-1)^2+\dfrac{1}{3}(\cos x-1)^3+o(x^6)$，又，$\cos x-1=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{24}x^4-\dfrac{1}{720}x^6+o(x^7)$，因此，

$$\ln\cos x=\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{24}x^6\right)+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{8}x^6\right)+o(x^6)$$

$$=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+o(x^6).$$

12. 证明下列不等式:

(1) 当 $0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$ 时,$\frac{\tan x_2}{\tan x_1}>\frac{x_2}{x_1}$;

(2) 当 $x>0$ 时,$\ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x}$;

(3) 当 $e<a<b<e^2$ 时,$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$.

证 (1) 取函数 $f(x)=\frac{\tan x}{x}, 0<x<\frac{\pi}{2}$.

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时,

$$f'(x)=\frac{x\sec^2 x-\tan x}{x^2}>0(x\sec^2 x-\tan x>x-\tan x>0)$$

故 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加,因此,当 $0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$ 时,

$$f(x_2)>f(x_1),$$

即

$$\frac{\tan x_2}{x_2}>\frac{\tan x_1}{x_1},$$

亦即

$$\frac{\tan x_2}{\tan x_1}>\frac{x_2}{x_1}.$$

(2) 取函数 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x(x>0)$.

当 $x>0$ 时,

$$f'(x)=\ln(1+x)+1-\frac{1}{1+x^2}>0,$$

故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加,因此,当 $x>0$ 时,

$$f(x)>f(0),$$

即 $(1+x)\ln(1+x)-\arctan x>0$,亦即

$$\ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x}.$$

(3) 设 $f(x)=\ln^2 x(e<a<x<b<e^2)$.

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,由拉格朗日中值定理知,至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使

$$\ln^2 b - \ln^2 a = \frac{2\ln \xi}{\xi}(b-a).$$

设 $\varphi(t)=\frac{\ln t}{t}$,则 $\varphi'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}$. 当 $t>\mathrm{e}$ 时,$\varphi'(t)<0$,所以 $\varphi(t)$ 在 $[\mathrm{e},+\infty)$ 上单调减少,而 $\mathrm{e}<a<\xi<b<\mathrm{e}^2$,从而 $\varphi(\xi)>\varphi(\mathrm{e}^2)$,即

$$\frac{\ln\xi}{\xi}>\frac{\ln \mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2}=\frac{2}{\mathrm{e}^2},$$

因此,$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{\mathrm{e}^2}(b-a)$.

13. 设 $a>1$,$f(x)=a^x-ax$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的驻点为 $x(a)$. 问 a 为何值时,$x(a)$ 最小? 并求出最小值.

解　由 $f'(x)=a^x\ln a-a=0$,得惟一驻点

$$x(a)=1-\frac{\ln\ln a}{\ln a}.$$

考察函数 $x(a)=1-\frac{\ln\ln a}{\ln a}$ 在 $a>1$ 时的最小值. 令

$$x'(a)=-\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\ln\ln a}{(\ln a)^2}=-\frac{1-\ln\ln a}{a(\ln a)^2}=0,$$

得惟一驻点,$a=\mathrm{e}^{\mathrm{e}}$. 当 $a>\mathrm{e}^{\mathrm{e}}$ 时,$x'(a)>0$;当 $a<\mathrm{e}^{\mathrm{e}}$ 时,$x'(a)<0$,因此

$$x(\mathrm{e}^{\mathrm{e}})=1-\frac{1}{\mathrm{e}}$$

为极小值,也是最小值.

14. 求椭圆 $x^2-xy+y^2=3$ 上纵坐标最大和最小的点.

解　在椭圆方程两端分别对 x 求导,得

$$2x-y-xy'+2yy'=0,$$

$$y'=\frac{y-2x}{2y-x}.$$

令 $y'=0$,得 $y=2x$. 将 $y=2x$ 代入椭圆方程后得 $x^2=1$,故 $x=\pm1$. 从而得到椭圆上的点 $(1,2)$,$(-1,-2)$. 根据题意即知点 $(1,2)$,$(-1,-2)$ 为椭圆 $x^2-xy+y^2=3$ 上纵坐标最大和最小的点.

15. 求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项.

解　取函数 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}\ (x>0)$,则

$$f'(x)=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x).$$

令 $f'(x)=0$,得驻点 $x=\mathrm{e}$. 当 $0<x<\mathrm{e}$ 时,$f'(x)>0$;当 $\mathrm{e}<x<+\infty$ 时,$f'(x)<0$,因此点 $x=\mathrm{e}$ 为 $f(x)$ 的极大值点. 由于驻点惟一,极大值点也是最大值点且最大值为 $f(\mathrm{e})=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$.

由 $1<\sqrt{2}$ 及 $f(x)$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 内单调减少,知

$$\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \cdots > \sqrt[n]{n} > \cdots$$

又 $\max\{\sqrt{2},\sqrt[3]{3}\} = \sqrt[3]{3}$，故数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项为 $\sqrt[3]{3}$.

16. 曲线弧 $y = \sin x(0 < x < \pi)$ 上哪一点处的曲率半径最小？求出该点处的曲率半径.

解　$y' = \cos x, y'' = -\sin x$，曲线 $y = \sin x\ (0 < x < \pi)$ 的曲率为

$$K = \frac{|-\sin x|}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^{3/2}},$$

由 $K' = \dfrac{2\cos x(1+\sin^2 x)}{(1+\cos^2 x)^{\frac{5}{2}}} = 0$ 知 $x = \dfrac{\pi}{2}$.

当 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时，$K' > 0$；当 $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ 时，$K' < 0$. 因此 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 为 K 的极大值点. 又驻点惟一，故极大值点也是最大值点，且 K 的最大值为

$$K = \left.\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}\right|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1.$$

此时曲率半径 $\rho = 1$ 最小，故曲线弧 $y = \sin x(0 < x < \pi)$ 上点 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 处的曲率半径最小且曲率半径为 $\rho = 1$.

17. 证明方程 $x^3 - 5x - 2 = 0$ 只有一个正根，并求此正根的近似值，精确到 10^{-3}.

证　取函数 $f(x) = x^3 - 5x - 2, f'(x) = 3x^2 - 5$.

令 $f'(x) = 0$ 得驻点 $x = \sqrt{\dfrac{5}{3}}$.

当 $0 < x < \sqrt{\dfrac{5}{3}}$ 时，$f'(x) < 0$，故 $f(x)$ 在 $\left[0,\sqrt{\dfrac{5}{3}}\right]$ 上单调减少，又

$$f(0) = -2 < 0, f\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{3}{2}} - 5\sqrt{\frac{5}{3}} - 2 < 0.$$

因此方程 $f(x) = 0$ 即 $x^3 - 5x - 2 = 0$ 在 $\left(0,\sqrt{\dfrac{5}{3}}\right)$ 内没有实根.

当 $\sqrt{\dfrac{5}{3}} < x < +\infty$ 时，$f'(x) > 0$，故 $f(x)$ 在 $\left[\sqrt{\dfrac{5}{3}}, +\infty\right)$ 上单调增加，因此方程 $f(x) = 0$ 在 $\left[\sqrt{\dfrac{5}{3}}, +\infty\right)$ 上至多有一实根，又 $f(3) = 10 > 0$，由零点定理知至少存在一点 $\xi \in \left(\sqrt{\dfrac{5}{3}},3\right)$，使 $f(\xi) = 0$，即方程 $f(x) = 0$ 亦即 $x^3 - 5x - 2 = 0$ 在 $\left(\sqrt{\dfrac{5}{3}},3\right)$ 内至少有一实根，因此方程 $x^3 - 5x - 2 = 0$ 在 $\left(\sqrt{\dfrac{5}{3}},3\right)$ 内只有一正根.

综上，方程 $x^3 - 5x - 2 = 0$ 只有一个正根.

现在用二分法来求该方程正根的近似值，由 $f(2)=-4<0$，为了方便起见，取区间 $[2,3]$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_n	2	2	2.25	2.375	2.375	2.406	2.406	2.414	2.414	2.414	2.414
b_n	3	2.5	2.5	2.5	2.438	2.438	2.422	2.422	2.418	2.416	2.415
中点 x_n	2.5	2.25	2.375	2.438	2.406	2.422	2.414	2.418	2.416	2.415	2.415
$f(x_n)$的符号	+	−	−	+	−	+	−	+	+	+	+

故误差不超过 10^{-3} 的正根的近似值为 $\xi=2.415$.

***18.** 设 $f''(x_0)$ 存在，证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0).$$

证 $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}+\frac{f'(x_0-h)-f'(x_0)}{-h}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[f''(x_0)+f''(x_0)]$$

$$=f''(x_0).$$

19. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导，且 $f''(x)\geqslant 0$. 证明对于 (a,b) 内任意两点 x_1,x_2 及 $0\leqslant t\leqslant 1$，有

$$f[(1-t)x_1+tx_2]\leqslant(1-t)f(x_1)+tf(x_2).$$

证 由 $x_1,x_2\in(a,b)$ 知 $x_0=(1-t)x_1+tx_2\in(a,b)$，利用泰勒公式有

$$f(x_1)=f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi_1)(x_1-x_0)^2,\ \xi_1 \text{ 介于 } x_1 \text{ 与 } x_0 \text{ 之间};$$

$$f(x_2)=f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi_2)(x_2-x_0)^2,\ \xi_2 \text{ 介于 } x_2 \text{ 与 } x_0 \text{ 之间}.$$

由 $f''(x)\geqslant 0$ 知 $f''(\xi_1)\geqslant 0,f''(\xi_2)\geqslant 0$，故

$$f(x_1)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0) \text{ 及 } f(x_2)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0),$$

因此，

$$\begin{aligned}&(1-t)f(x_1)+tf(x_2)\\ \geqslant&(1-t)f(x_0)+tf(x_0)+f'(x_0)[(1-t)(x_1-x_0)+t(x_2-x_0)]\\ =&f(x_0)+f'(x_0)[(1-t)x_1+tx_2-x_0]=f(x_0),\end{aligned}$$

即 $f[(1-t)x_1+tx_2]\leqslant(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$.

20. 试确定常数 a 和 b，使 $f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$ 为当 $x\to 0$ 时关于 x 的 5 阶无穷小.

解 利用泰勒公式

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x - a\sin x - \frac{b}{2}\sin 2x \\
&= x - a\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right] - \frac{b}{2}\left[2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} + o(x^5)\right] \\
&= (1-a-b)x + \left(\frac{a}{6} + \frac{2b}{3}\right)x^3 - \left(\frac{a}{120} + \frac{2b}{15}\right)x^5 + o(x^5).
\end{aligned}
$$

按题意,应有

$$
\begin{cases}
1 - a - b = 0, \\
\dfrac{a}{6} + \dfrac{2b}{3} = 0, \\
\dfrac{a}{120} + \dfrac{2b}{15} \neq 0,
\end{cases}
$$

得 $a = \frac{4}{3}, b = -\frac{1}{3}$. 因此,当 $a = \frac{4}{3}, b = -\frac{1}{3}$ 时,$f(x) = x - (a + b\cos x)\sin x$ 是 $x \to 0$ 时关于 x 的 5 阶无穷小.

第四章

不定积分

习题 4-1　不定积分的概念与性质

1. 利用导数验证下列等式：

(1) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$;

(2) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$;

(3) $\int \frac{2x}{(x^2+1)(x+1)^2}dx = \arctan x+\frac{1}{x+1}+C$;

(4) $\int \sec x dx = \ln|\tan x+\sec x|+C$;

(5) $\int x\cos x dx = x\sin x+\cos x+C$;

(6) $\int e^x\sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$.

解　(1) $\frac{d}{dx}[\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C] = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

(2) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C\right) = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\cdot x-\sqrt{x^2-1}}{x^2} = \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

(3) $\frac{d}{dx}\left(\arctan x+\frac{1}{x+1}+C\right) = \frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)(x+1)^2}$.

(4) $\frac{d}{dx}(\ln|\tan x+\sec x|+C) = \frac{1}{\tan x+\sec x}\cdot(\sec^2x+\sec x\tan x) = \sec x$.

(5) $\frac{d}{dx}(x\sin x+\cos x+C) = \sin x+x\cos x-\sin x = x\cos x$.

(6) $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C\right] = \frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)$

$= e^x\sin x$.

2. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{x^2}$;　　(2) $\int x\sqrt{x}dx$;

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$;　　(4) $\int x^2 \sqrt[3]{x}dx$;

(5) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x}}$;　　(6) $\int \sqrt[m]{x^n}dx$;

(7) $\int 5x^3 dx$;　　(8) $\int (x^2-3x+2)dx$;

(9) $\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}}$($g$ 是常数);　　(10) $\int (x^2+1)^2 dx$;

(11) $\int (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x^3}-1)dx$;　　(12) $\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}dx$;

(13) $\int \left(2e^x+\frac{3}{x}\right)dx$;　　(14) $\int \left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$;

(15) $\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right)dx$;　　(16) $\int 3^x e^x dx$;

(17) $\int \frac{2\cdot 3^x-5\cdot 2^x}{3^x}dx$;　　(18) $\int \sec x(\sec x-\tan x)dx$;

(19) $\int \cos^2\frac{x}{2}dx$;　　(20) $\int \frac{dx}{1+\cos 2x}$;

(21) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx$;　　(22) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$;

(23) $\int \cot^2 x dx$;　　(24) $\int \cos\theta(\tan\theta+\sec\theta)d\theta$;

(25) $\int \frac{x^2}{x^2+1}dx$;　　(26) $\int \frac{3x^4+2x^2}{x^2+1}dx$.

解　(1) $\int \frac{dx}{x^2}=\int x^{-2}dx=\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}+C=-\frac{1}{x}+C.$

(2) $\int x\sqrt{x}dx=\int x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}+C=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C.$

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}=\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}+C=2\sqrt{x}+C.$

(4) $\int x^2\sqrt[3]{x}dx=\int x^{\frac{7}{3}}dx=\frac{1}{\frac{7}{3}+1}x^{\frac{7}{3}+1}+C=\frac{3}{10}x^{\frac{10}{3}}+C.$

(5) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x}}=\int x^{-\frac{5}{2}}dx=\frac{1}{-\frac{5}{2}+1}x^{-\frac{5}{2}+1}+C=-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}+C.$

(6) $\int \sqrt[m]{x^n}\,dx = \dfrac{1}{\dfrac{n}{m}+1}x^{\frac{n}{m}+1} + C = \dfrac{m}{m+n}x^{\frac{m+n}{m}} + C.$

(7) $\int 5x^3\,dx = \dfrac{5}{3+1}x^{3+1} + C = \dfrac{5}{4}x^4 + C.$

(8) $\int (x^2 - 3x + 2)\,dx = \int x^2\,dx - 3\int x\,dx + 2\int dx = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x + C.$

(9) $\int \dfrac{dh}{\sqrt{2gh}} = \dfrac{1}{\sqrt{2g}}\int h^{-\frac{1}{2}}\,dh = \dfrac{1}{\sqrt{2g}} \times 2\sqrt{h} + C = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} + C.$

(10) $\int (x^2+1)^2\,dx = \int (x^4 + 2x^2 + 1)\,dx = \int x^4\,dx + 2\int x^2\,dx + \int dx$

$= \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{2}{3}x^3 + x + C.$

(11) $\int (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x^3}-1)\,dx = \int (x^2 + x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} - 1)\,dx$

$= \int x^2\,dx + \int x^{\frac{3}{2}}\,dx - \int x^{\frac{1}{2}}\,dx - \int dx$

$= \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x + C.$

(12) $\int \dfrac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}\,dx = \int (x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})\,dx$

$= \int x^{\frac{3}{2}}\,dx - 2\int x^{\frac{1}{2}}\,dx + \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$= \dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \dfrac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C.$

(13) $\int \left(2e^x + \dfrac{3}{x}\right)dx = 2\int e^x\,dx + 3\int \dfrac{dx}{x} = 2e^x + 3\ln|x| + C.$

(14) $\int \left(\dfrac{3}{1+x^2} - \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = 3\int \dfrac{dx}{1+x^2} - 2\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$= 3\arctan x - 2\arcsin x + C.$

(15) $\int e^x\left(1 - \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right)dx = \int e^x\,dx - \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = e^x - 2x^{\frac{1}{2}} + C.$

(16) $\int 3^x e^x\,dx = \int (3e)^x\,dx = \dfrac{(3e)^x}{\ln(3e)} + C = \dfrac{3^x e^x}{\ln 3 + 1} + C.$

(17) $\int \dfrac{2\cdot 3^x - 5\cdot 2^x}{3^x}\,dx = 2\int dx - 5\int \left(\dfrac{2}{3}\right)^x dx = 2x - \dfrac{5}{\ln\dfrac{2}{3}}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x + C$

$= 2x - \dfrac{5}{\ln 2 - \ln 3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x + C.$

(18) $\int \sec x(\sec x-\tan x)\,dx=\int \sec^2 x\,dx-\int \sec x\tan x\,dx$

$=\tan x-\sec x+C.$

(19) $\int \cos^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1+\cos x}{2}dx=\frac{x+\sin x}{2}+C.$

(20) $\int\frac{dx}{1+\cos 2x}=\int\frac{\sec^2 x}{2}dx=\frac{\tan x}{2}+C.$

(21) $\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}dx=\sin x-\cos x+C.$

(22) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=\int(\csc^2 x-\sec^2 x)\,dx$

$=\int\csc^2 x\,dx-\int\sec^2 x\,dx=-(\cot x+\tan x)+C.$

(23) $\int\cot^2 x\,dx=\int\csc^2 x\,dx-\int dx=-\cot x-x+C.$

(24) $\int\cos\theta(\tan\theta+\sec\theta)\,d\theta=\int\sin\theta\,d\theta+\int d\theta=-\cos\theta+\theta+C.$

(25) $\int\frac{x^2}{x^2+1}dx=\int dx-\int\frac{1}{x^2+1}dx=x-\arctan x+C.$

(26) $\int\frac{3x^4+2x^2}{x^2+1}dx=\int 3x^2\,dx-\int dx+\int\frac{1}{x^2+1}dx=x^3-x+\arctan x+C.$

3. 含有未知函数的导数的方程称为微分方程，例如方程$\frac{dy}{dx}=f(x)$，其中$\frac{dy}{dx}$为未知函数的导数，$f(x)$为已知函数. 如果将函数$y=\varphi(x)$代入微分方程，使微分方程成为恒等式，那么函数$y=\varphi(x)$就称为这个微分方程的解. 求下列微分方程满足所给条件的解：

(1) $\frac{dy}{dx}=(x-2)^2,\ y|_{x=2}=0$;

(2) $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{2}{t^3},\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=1}=1,\ x|_{t=1}=1.$

解 (1) $$y=\int(x-2)^2dx=\frac{1}{3}(x-2)^3+C,$$

由$y|_{x=2}=0$，得$C=0$，于是所求的解为$y=\frac{1}{3}(x-2)^3$.

(2) $$\frac{dx}{dt}=\int\frac{2}{t^3}dt=-\frac{1}{t^2}+C_1,$$

由$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=1}=1$，得$C_1=2$，故$\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{t^2}+2$，

$$x=\int\left(-\frac{1}{t^2}+2\right)dt=\frac{1}{t}+2t+C_2,$$

由 $x|_{t=1}=1$，得 $C_2=-2$，于是所求的解为 $x=\frac{1}{t}+2t-2$.

4. 汽车以 20 m/s 的速度行驶，刹车后匀减速行驶了 50 m 停住，求刹车加速度. 可执行下列步骤：

(1) 求微分方程 $\frac{d^2s}{dt^2}=-k$ 满足条件 $\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0}=20$ 及 $s|_{t=0}=0$ 的解；

(2) 求使 $\frac{ds}{dt}=0$ 的 t 值；

(3) 求使 $s=50$ 的 k 值.

解　(1)
$$\frac{ds}{dt}=\int -k\,dt=-kt+C_1,$$
由 $\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0}=20$，得 $C_1=20$，故
$$\frac{ds}{dt}=-kt+20,$$
$$s=\int(-kt+20)\,dt=-\frac{1}{2}kt^2+20t+C_2,$$
由 $s|_{t=0}=0$，得 $C_2=0$，于是所求的解为
$$s=-\frac{1}{2}kt^2+20t.$$

(2) 令 $\frac{ds}{dt}=0$，解得 $t=\frac{20}{k}$.

(3) 根据题意，当 $t=\frac{20}{k}$ 时，$s=50$，即
$$-\frac{1}{2}k\left(\frac{20}{k}\right)^2+\frac{400}{k}=50,$$
解得 $k=4$，即得刹车加速度为 $-4\ m/s^2$.

5. 一曲线通过点 $(e^2,3)$，且在任一点处的切线的斜率等于该点横坐标的倒数，求该曲线的方程.

解　设曲线方程为 $y=f(x)$，则点 (x,y) 处的切线斜率为 $f'(x)$，由条件得
$$f'(x)=\frac{1}{x},$$
因此 $f(x)$ 为 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数，故有 $f(x)=\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$.

又，根据条件曲线过点 $(e^2,3)$，有 $f(e^2)=3$ 解得 $C=1$，即得所求曲线方程为
$$y=\ln x+1.$$

6. 一物体由静止开始运动，经 t 秒后的速度是 $3t^2$(m/s)，问

(1) 在 3 秒后物体离开出发点的距离是多少？

(2) 物体走完 360 m 需要多少时间?

解 (1) 设此物体自原点沿横轴正向由静止开始运动,位移函数为 $s=s(t)$,则

$$s(t)=\int v(t)\,\mathrm{d}t=\int 3t^2\,\mathrm{d}t=t^3+C,$$

由假设可知 $s(0)=0$,故 $s(t)=t^3$,于是所求距离为 $s(3)=27(\mathrm{m})$.

(2) 由 $t^3=360$,得 $t=\sqrt[3]{360}\approx 7.11(\mathrm{s})$.

7. 证明函数 $\arcsin(2x-1)$,$\arccos(1-2x)$ 和 $2\arctan\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ 都是 $\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ 的原函数.

证 $$[\arcsin(2x-1)]'=\frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}\cdot 2=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}},$$

$$[\arccos(1-2x)]'=-\frac{1}{\sqrt{1-(1-2x)^2}}\cdot(-2)=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}},$$

$$\left(2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)'=2\,\frac{1}{1+\dfrac{x}{1-x}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{x}}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}.$$

故结论成立.

习题 4-2 换元积分法

1. 在下列各式等号右端的空白处填入适当的系数,使等式成立(例如:$\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}\mathrm{d}(4x+7)$):

(1) $\mathrm{d}x=\_\,\mathrm{d}(ax)$;

(2) $\mathrm{d}x=\_\,\mathrm{d}(7x-3)$;

(3) $x\mathrm{d}x=\_\,\mathrm{d}(x^2)$;

(4) $x\mathrm{d}x=\_\,\mathrm{d}(5x^2)$;

(5) $x\mathrm{d}x=\_\,\mathrm{d}(1-x^2)$;

(6) $x^3\mathrm{d}x=\_\,\mathrm{d}(3x^4-2)$;

(7) $\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\_\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x})$;

(8) $\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\_\,\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}})$;

(9) $\sin\dfrac{3}{2}x\mathrm{d}x=\_\,\mathrm{d}(\cos\dfrac{3}{2}x)$;

(10) $\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\_\,\mathrm{d}(5\ln|x|)$;

(11) $\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\_\,\mathrm{d}(3-5\ln|x|)$;

(12) $\dfrac{\mathrm{d}x}{1+9x^2}=\_\,\mathrm{d}(\arctan 3x)$;

(13) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\_\,\mathrm{d}(1-\arcsin x)$;

(14) $\dfrac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\_\,\mathrm{d}(\sqrt{1-x^2})$.

解 (1) $\dfrac{1}{a}$; (2) $\dfrac{1}{7}$; (3) $\dfrac{1}{2}$; (4) $\dfrac{1}{10}$; (5) $-\dfrac{1}{2}$;

(6) $\dfrac{1}{12}$; (7) $\dfrac{1}{2}$; (8) -2; (9) $-\dfrac{2}{3}$; (10) $\dfrac{1}{5}$;

(11) $-\frac{1}{5}$；　(12) $\frac{1}{3}$；　(13) -1；　(14) -1.

2. 求下列不定积分(其中 a、b、ω、φ 均为常数)：

(1) $\int e^{5t}dt$；　(2) $\int (3-2x)^3dx$；

(3) $\int \frac{dx}{1-2x}$；　(4) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}}$；

(5) $\int (\sin ax - e^{\frac{x}{b}})dx$；　(6) $\int \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$；

(7) $\int xe^{-x^2}dx$；　(8) $\int x\cos(x^2)dx$；

(9) $\int \frac{x}{\sqrt{2-3x^2}}dx$；　(10) $\int \frac{3x^3}{1-x^4}dx$；

(11) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}dx$；　(12) $\int \cos^2(\omega t+\varphi)\sin(\omega t+\varphi)dt$；

(13) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$；　(14) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$；

(15) $\int \tan^{10}x \cdot \sec^2 x dx$；　(16) $\int \frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}$；

(17) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$；　(18) $\int \frac{10^{2\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$；

(19) $\int \tan\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$；　(20) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$；

(21) $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}dx$；　(22) $\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$；

(23) $\int \frac{\ln\tan x}{\cos x\sin x}dx$；　(24) $\int \cos^3 x dx$；

(25) $\int \cos^2(\omega t+\varphi)dt$；　(26) $\int \sin 2x\cos 3x dx$；

(27) $\int \cos x\cos\frac{x}{2}dx$；　(28) $\int \sin 5x\sin 7x dx$；

(29) $\int \tan^3 x\sec x dx$；　(30) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$；

(31) $\int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}dx$；　(32) $\int \frac{x^3}{9+x^2}dx$；

(33) $\int \frac{dx}{2x^2-1}$；　(34) $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$；

(35) $\int \frac{x}{x^2-x-2}dx$;　(36) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}(a>0)$;

(37) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;　(38) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$;

(39) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$;　(40) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x}}$;

(41) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}$;　(42) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$;

(43) $\int \frac{x-1}{x^2+2x+3}dx$;　(44) $\int \frac{x^3+1}{(x^2+1)^2}dx$.

解　(1) 令 $u=5t$,由第一类换元法得

$$\int e^{5t}dt=\frac{1}{5}\int e^u du=\frac{1}{5}e^u+C=\frac{1}{5}e^{5t}+C.$$

(2) 令 $u=3-2x$,由第一类换元法得

$$\int (3-2x)^3dx=-\frac{1}{2}\int u^3du=-\frac{u^4}{8}+C=-\frac{(3-2x)^4}{8}+C.$$

(3) 令 $u=1-2x$,由第一类换元法得

$$\int \frac{dx}{1-2x}=-\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}=-\frac{1}{2}\ln|u|+C=-\frac{1}{2}\ln|1-2x|+C.$$

(4) $$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}}=\int -\frac{1}{3}(2-3x)^{-\frac{1}{3}}d(2-3x)$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(2-3x)^{\frac{2}{3}}+C=-\frac{1}{2}(2-3x)^{\frac{2}{3}}+C.$$

(5) $$\int (\sin ax-e^{\frac{x}{b}})dx=\int \sin ax dx-\int e^{\frac{x}{b}}dx$$

$$=\int \frac{1}{a}\sin ax d(ax)-\int be^{\frac{x}{b}}d\left(\frac{x}{b}\right)$$

$$=\frac{1}{a}(-\cos ax)-be^{\frac{x}{b}}+C=-\frac{\cos ax}{a}-be^{\frac{x}{b}}+C.$$

(6) $$\int \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt=\int 2\sin\sqrt{t}d\sqrt{t}=-2\cos\sqrt{t}+C.$$

(7) $$\int xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int e^{-x^2}d(-x^2)=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C.$$

(8) $$\int x\cos(x^2)dx=\frac{1}{2}\int \cos(x^2)d(x^2)=\frac{1}{2}\sin(x^2)+C.$$

(9) $$\int \frac{x}{\sqrt{2-3x^2}}dx=-\frac{1}{6}\int (2-3x^2)^{-\frac{1}{2}}d(2-3x^2)$$

$$= -\frac{1}{6}\cdot 2(2-3x^2)^{\frac{1}{2}} + C = -\frac{\sqrt{2-3x^2}}{3} + C.$$

(10) $\int \frac{3x^3}{1-x^4}\mathrm{d}x = -\frac{3}{4}\int \frac{1}{1-x^4}\mathrm{d}(1-x^4) = -\frac{3}{4}\ln|1-x^4| + C.$

(11) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + C.$

(12) $\int \cos^2(\omega t+\varphi)\sin(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t = -\frac{1}{\omega}\int \cos^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}[\cos(\omega t+\varphi)]$

$$= -\frac{1}{3\omega}\cos^3(\omega t+\varphi) + C.$$

(13) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{\cos^3 x}\mathrm{d}(\cos x) = \frac{1}{2\cos^2 x} + C.$

(14) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x-\cos x)}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}} = \frac{3}{2}(\sin x-\cos x)^{\frac{2}{3}} + C.$

(15) $\int \tan^{10}x\cdot\sec^2 x\mathrm{d}x = \int \tan^{10}x\mathrm{d}(\tan x) = \frac{1}{11}\tan^{11}x + C.$

(16) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln\ln x} = \int \frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\ln x\ln\ln x} = \int \frac{\mathrm{d}(\ln\ln x)}{\ln\ln x} = \ln|\ln\ln x| + C.$

(17) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}(\arcsin x)}{(\arcsin x)^2} = -\frac{1}{\arcsin x} + C.$

(18) $\int \frac{10^{2\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int -10^{2\arccos x}\mathrm{d}(\arccos x) = -\frac{10^{2\arccos x}}{2\ln 10} + C.$

(19) $\int \tan\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int \tan\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}$

$$= \int \tan\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}(\sqrt{1+x^2})$$

$$= -\ln\left|\cos\sqrt{1+x^2}\right| + C.$$

(20) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x = \int \frac{2\arctan\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}\sqrt{x} = \int 2\arctan\sqrt{x}\mathrm{d}(\arctan\sqrt{x})$

$$= (\arctan\sqrt{x})^2 + C.$$

(21) $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(x\ln x)}{(x\ln x)^2} = -\frac{1}{x\ln x} + C.$

(22) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos x} = \int \csc 2x\mathrm{d}(2x) = \ln|\csc 2x - \cot 2x| + C = \ln|\tan x| + C.$

(23) $\int \frac{\ln\tan x}{\cos x\sin x}\mathrm{d}x = \int \frac{\ln\tan x}{\tan x}\mathrm{d}(\tan x) = \int \ln\tan x\mathrm{d}(\ln\tan x)$

$$= \frac{(\ln\tan x)^2}{2} + C.$$

(24) $\int \cos^3 x\mathrm{d}x = \int (1-\sin^2 x)\mathrm{d}(\sin x) = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$

(25) $\int \cos^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t = \int \frac{\cos 2(\omega t+\varphi)+1}{2}\mathrm{d}t = \frac{\sin 2(\omega t+\varphi)}{4\omega} + \frac{t}{2} + C.$

(26) $\int \sin 2x\cos 3x\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}(\sin 5x - \sin x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C.$

(27) $\int \cos x\cos \frac{x}{2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\left(\cos \frac{3}{2}x + \cos \frac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{3}\sin \frac{3}{2}x + \sin \frac{1}{2}x + C.$$

(28) $\int \sin 5x\sin 7x\mathrm{d}x = \int -\frac{1}{2}(\cos 12x - \cos 2x)\mathrm{d}x$

$$= -\frac{1}{24}\sin 12x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

(29) $\int \tan^3 x\sec x\mathrm{d}x = \int (\sec^2 x - 1)\mathrm{d}(\sec x) = \frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + C.$

(30) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}} = \int \frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+1} = \int \frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^{2x}+1} = \arctan(\mathrm{e}^x) + C.$

(31) $\int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{2x}{3}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{3}\right)^2}} + \frac{1}{8}\int \frac{\mathrm{d}(9-4x^2)}{\sqrt{9-4x^2}}$

$$= \frac{\arcsin \frac{2x}{3}}{2} + \frac{\sqrt{9-4x^2}}{4} + C.$$

(32) $\int \frac{x^3}{9+x^2}\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}x - \frac{9}{2}\int \frac{\mathrm{d}(9+x^2)}{9+x^2} = \frac{x^2}{2} - \frac{9}{2}\ln(9+x^2) + C.$

(33) $\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2-1} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{\sqrt{2}x-1} - \frac{1}{\sqrt{2}x+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x-1}{\sqrt{2}x+1}\right| + C.$

(34) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x-2)} = \int \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + C.$$

(35) $\int \frac{x}{x^2-x-2}\mathrm{d}x = \int \frac{x}{(x-2)(x+1)}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$

$$= \frac{2}{3}\ln|x-2| + \frac{1}{3}\ln|x+1| + C.$$

(36) 设 $x = a\sin u\left(-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}\right)$，则$\sqrt{a^2-x^2} = a\cos u$，$\mathrm{d}x = a\cos u\mathrm{d}u$，于是

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int a^2\sin^2 u\,\mathrm{d}u = a^2\int \frac{1-\cos 2u}{2}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(u - \frac{\sin 2u}{2}\right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + C.$$

(37) 当 $x>1$ 时，

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} \xlongequal{x=\frac{1}{t}} -\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin t + C$$

$$= -\arcsin\frac{1}{x} + C,$$

当 $x<-1$ 时，

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} \xlongequal{x=\frac{1}{t}} \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin\frac{1}{x} + C,$$

故在 $(-\infty,-1)$ 或 $(1,+\infty)$ 内，有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = -\arcsin\frac{1}{|x|} + C.$$

(38) 设 $x=\tan u\left(-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\sqrt{x^2+1}=\sec u$，$\mathrm{d}x=\sec^2 u\,\mathrm{d}u$，于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = \int \cos u\,\mathrm{d}u = \sin u + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

(39) 当 $x>3$ 时，令 $x=3\sec u\left(0\leqslant u<\frac{\pi}{2}\right)$，

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\mathrm{d}x = \int 3\tan^2 u\,\mathrm{d}u = 3\int(\sec^2 u-1)\,\mathrm{d}u = 3\tan u - 3u + C$$

$$= \sqrt{x^2-9} - 3\arccos\frac{3}{x} + C;$$

当 $x<-3$ 时，令 $x=3\sec u\left(\frac{\pi}{2}<u\leqslant\pi\right)$，

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\mathrm{d}x = -\int 3\tan^2 u\,\mathrm{d}u = -3\int(\sec^2 u-1)\,\mathrm{d}u = -3\tan u + 3u + C'$$

$$= \sqrt{x^2-9} + 3\arccos\frac{3}{x} + C'$$

$$= \sqrt{x^2-9} - 3\arccos\frac{3}{-x} + C' + 3\pi,$$

故可统一写作 $\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\mathrm{d}x=\sqrt{x^2-9}-3\arccos\frac{3}{|x|}+C.$

(40) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{2x}}\xlongequal{x=\frac{u^2}{2}}\int\frac{u\mathrm{d}u}{1+u}=u-\ln(1+u)+C=\sqrt{2x}-\ln(1+\sqrt{2x})+C.$

(41) 令 $x=\sin t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$,则$\sqrt{1-x^2}=\cos t,\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$,于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{\cos t}{1+\cos t}\mathrm{d}t=\int\frac{2\cos^2\frac{t}{2}-1}{2\cos^2\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=t-\tan\frac{t}{2}+C$$

$$=t-\frac{\sin t}{1+\cos t}+C=\arcsin x-\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}+C.$$

(42) 设 $x=\sin t\left(-\frac{\pi}{4}<t<\frac{\pi}{2}\right)$,则$\sqrt{1-x^2}=\cos t,\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$,于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{\cos t\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t},$$

记 $I_1=\int\frac{\cos t\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t},I_2=\int\frac{\sin t\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t}$,利用

$$I_1+I_2=\int\mathrm{d}t=t+C,$$

$$I_1-I_2=\int\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{d}(\sin t+\cos t)}{\sin t+\cos t}=\ln|\sin t+\cos t|+C,$$

求得

$$I_1=\int\frac{\cos t\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t}=\frac{1}{2}(t+\ln|\sin t+\cos t|)+C,$$

即求得在$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$内,有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}(\arcsin x+\ln|x+\sqrt{1-x^2}|)+C;$$

再设 $x=\sin t\left(-\frac{\pi}{2}<t<-\frac{\pi}{4}\right)$,重复上面的过程,可得在$\left(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$内有与上面不定积分形式相同的结果.从而在$\left(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$或$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$内,有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}(\arcsin x+\ln|x+\sqrt{1-x^2}|)+C.$$

(43) $\displaystyle\int\frac{x-1}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x=\int\frac{x+1-2}{(x+1)^2+2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}[(x+1)^2+2]}{(x+1)^2+2}-\sqrt{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)-\sqrt{2}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

(44) 设 $x=\tan t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$,则 $x^2+1=\sec^2 t,\mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t$,于是

$$\begin{aligned}\int\frac{x^3+1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x&=\int\frac{\tan^3 t+1}{\sec^2 t}\mathrm{d}t\\&=\int\frac{\cos^2 t-1}{\cos t}\mathrm{d}(\cos t)+\int\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\cos^2 t-\ln\cos t+\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t+C\\&=\frac{1}{2}\cos^2 t-\ln\cos t+\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\sin t\cos t+C.\end{aligned}$$

按 $\tan t=x$ 作辅助三角形(图 4-1),便有

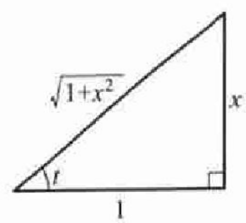


图 4-1

$$\cos t=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\quad \sin t=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

于是

$$\int\frac{x^3+1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x=\frac{1+x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

习题 4-3　分部积分法

求下列不定积分:

1. $\int x\sin x\mathrm{d}x$.
2. $\int \ln x\mathrm{d}x$.
3. $\int \arcsin x\mathrm{d}x$.
4. $\int xe^{-x}\mathrm{d}x$.
5. $\int x^2\ln x\mathrm{d}x$.
6. $\int e^{-x}\cos x\mathrm{d}x$.

7. $\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx$.

8. $\int x\cos\frac{x}{2}dx$.

9. $\int x^2\arctan x dx$.

10. $\int x\tan^2 x dx$.

11. $\int x^2\cos x dx$.

12. $\int te^{-2t}dt$.

13. $\int \ln^2 x dx$.

14. $\int x\sin x\cos x dx$.

15. $\int x^2\cos^2\frac{x}{2}dx$.

16. $\int x\ln(x-1)dx$.

17. $\int (x^2-1)\sin 2x dx$.

18. $\int \frac{\ln^3 x}{x^2}dx$.

19. $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$.

20. $\int \cos\ln x dx$.

21. $\int (\arcsin x)^2 dx$.

22. $\int e^x\sin^2 x dx$.

23. $\int x\ln^2 x dx$.

24. $\int e^{\sqrt{3x+9}}dx$.

解 1. $\int x\sin x dx = -\int x d(\cos x) = -x\cos x + \int \cos x dx$

$$= -x\cos x + \sin x + C.$$

2. $\int \ln x dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C.$

3. $\int \arcsin x dx = x\arcsin x - \int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$

4. $\int xe^{-x}dx = -\int x de^{-x} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$

5. $\int x^2\ln x dx = \frac{1}{3}\int \ln x d(x^3) = \frac{x^3\ln x}{3} - \frac{1}{3}\int x^3\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^3\ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C.$

6. $\int e^{-x}\cos x dx = -\int \cos x d(e^{-x}) = -e^{-x}\cos x + \int e^{-x}(-\sin x)dx$

$$= -e^{-x}\cos x + \int \sin x d(e^{-x})$$

$$= -e^{-x}\cos x + e^{-x}\sin x - \int e^{-x}\cos x dx,$$

故有

$$\int e^{-x}\cos x dx = \frac{e^{-x}(\sin x - \cos x)}{2} + C.$$

7. $\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx = -\frac{1}{2}\int \sin\frac{x}{2}d(e^{-2x})$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{8}\int\cos\frac{x}{2}d(e^{-2x})$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{8}e^{-2x}\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\int e^{-2x}\cdot\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{8}\left(4\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)e^{-2x} - \frac{1}{16}\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx,$$

故

$$\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx = -\frac{2}{17}\left(4\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)e^{-2x} + C.$$

8. $\int x\cos\frac{x}{2}dx = 2\int xd\left(\sin\frac{x}{2}\right) = 2x\sin\frac{x}{2} - 2\int\sin\frac{x}{2}dx$

$$= 2x\sin\frac{x}{2} + 4\cos\frac{x}{2} + C.$$

9. $\int x^2\arctan x dx = \frac{1}{3}\int\arctan x d(x^3) = \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{3}\int\frac{x^3}{1+x^2}dx$

$$= \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{3}\int\left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln(1+x^2) + C.$$

10. $\int x\tan^2 x dx = \int x(\sec^2 x - 1)dx = \int xd(\tan x) - \frac{x^2}{2}$

$$= x\tan x + \ln|\cos x| - \frac{x^2}{2} + C.$$

11. $\int x^2\cos x dx = \int x^2 d(\sin x) = x^2\sin x - \int 2x\sin x dx$

$$= x^2\sin x + \int 2xd(\cos x)$$

$$= x^2\sin x + 2x\cos x - \int 2\cos x dx$$

$$= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$$

12. $\int te^{-2t}dt = -\frac{1}{2}\int td(e^{-2t}) = -\frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{2}\int e^{-2t}dt$

$$= -\frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} + C.$$

13. $\int \ln^2 x dx = x\ln^2 x - \int 2\ln x dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + \int 2dx$

$$= x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C.$$

14. $\int x\sin x\cos x\mathrm{d}x = \int -\frac{x}{4}\mathrm{d}(\cos 2x) = -\frac{x\cos 2x}{4}+\frac{1}{4}\int \cos 2x\mathrm{d}x$

$= -\frac{x\cos 2x}{4}+\frac{\sin 2x}{8}+C.$

15. $\int x^2\cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int x^2(1+\cos x)\mathrm{d}x = \frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}\int x^2\mathrm{d}(\sin x)$

$= \frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\sin x-\int x\sin x\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\sin x+\int x\mathrm{d}(\cos x)$

$= \frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\sin x+x\cos x-\int \cos x\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\sin x+x\cos x-\sin x+C.$

16. $\int x\ln(x-1)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \ln(x-1)\mathrm{d}(x^2-1)$

$= \frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x-1)-\frac{1}{2}\int (x+1)\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x-1)-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+C.$

17. $\int (x^2-1)\sin 2x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int (x^2-1)\mathrm{d}(\cos 2x)$

$= -\frac{1}{2}(x^2-1)\cos 2x+\int x\cos 2x\mathrm{d}x$

$= -\frac{1}{2}(x^2-1)\cos 2x+\frac{1}{2}\int x\mathrm{d}(\sin 2x)$

$= -\frac{1}{2}(x^2-1)\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{2}\int \sin 2x\mathrm{d}x$

$= -\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{3}{2}\right)\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x+C.$

18. $\int \frac{\ln^3 x}{x^2}\mathrm{d}x = \int -\ln^3 x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\ln^3 x}{x}-3\int \ln^2 x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$

$= -\frac{\ln^3 x}{x}-3\left[\frac{\ln^2 x}{x}+2\int \ln x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)\right]$

$= -\frac{\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x+6}{x}+C.$

19. $\int \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x \xlongequal{x=u^3} \int 3u^2\mathrm{e}^u\mathrm{d}u = \int 3u^2\mathrm{d}(\mathrm{e}^u) = 3u^2\mathrm{e}^u-\int 6u\mathrm{d}(\mathrm{e}^u)$

$= (3u^2-6u+6)\mathrm{e}^u+C = 3\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}(x^{2/3}-2x^{1/3}+2)+C.$

20. $\int \cos \ln x \mathrm{d}x \xlongequal{x=\mathrm{e}^u} \int \mathrm{e}^u \cos u \mathrm{d}u$,

而

$$\int \mathrm{e}^u \cos u \mathrm{d}u = \int \cos u \mathrm{d}(\mathrm{e}^u) = \mathrm{e}^u \cos u + \int \mathrm{e}^u \sin u \mathrm{d}u$$

$$= \mathrm{e}^u \cos u + \int \sin u \mathrm{d}(\mathrm{e}^u)$$

$$= \mathrm{e}^u \cos u + \mathrm{e}^u \sin u - \int \mathrm{e}^u \cos u \mathrm{d}u,$$

因此 $\int \mathrm{e}^u \cos u \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}^u(\cos u + \sin u)}{2} + C$,故有

$$\int \cos \ln x \mathrm{d}x = \frac{x(\cos \ln x + \sin \ln x)}{2} + C.$$

21. $\int (\arcsin x)^2 \mathrm{d}x = x(\arcsin x)^2 - \int \frac{2x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$

$$= x(\arcsin x)^2 + \int 2\arcsin x \mathrm{d}(\sqrt{1-x^2})$$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C.$$

22. $\int \mathrm{e}^x \sin^2 x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^x(1-\cos 2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^x \cos 2x \mathrm{d}x$,

$$\int \mathrm{e}^x \cos 2x \mathrm{d}x = \int \cos 2x \mathrm{d}(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x \cos 2x + 2\int \mathrm{e}^x \sin 2x \mathrm{d}x$$

$$= \mathrm{e}^x \cos 2x + 2\int \sin 2x \mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$$

$$= \mathrm{e}^x \cos 2x + 2\mathrm{e}^x \sin 2x - 4\int \mathrm{e}^x \cos 2x \mathrm{d}x,$$

得 $\int \mathrm{e}^x \cos 2x \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x \cos 2x + 2\mathrm{e}^x \sin 2x}{5} + C$,因此有

$$\int \mathrm{e}^x \sin^2 x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x - \frac{1}{5}\mathrm{e}^x \sin 2x - \frac{1}{10}\mathrm{e}^x \cos 2x + C.$$

23. $\int x\ln^2 x \mathrm{d}x = \int \ln^2 x \mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int x\ln x \mathrm{d}x$

$$= \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int \ln x \mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \int \frac{x}{2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^2}{4}(2\ln^2 x - 2\ln x + 1) + C.$$

24. 设 $\sqrt{3x+9} = u$,即 $x = \frac{1}{3}(u^2 - 9)$,$\mathrm{d}x = \frac{2}{3}u\mathrm{d}u$,则

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt{3x+9}} \mathrm{d}x = \int \frac{2}{3}u\mathrm{e}^u \mathrm{d}u = \int \frac{2}{3}u \mathrm{d}(\mathrm{e}^u)$$

$$=\frac{2}{3}ue^u-\int\frac{2}{3}e^u\mathrm{d}u=\frac{2}{3}ue^u-\frac{2}{3}e^u+C$$
$$=\frac{2}{3}e^{\sqrt{3x+9}}(\sqrt{3x+9}-1)+C.$$

习题 4-4 有理函数的积分

求下列不定积分：

1. $\int\frac{x^3}{x+3}\mathrm{d}x.$

2. $\int\frac{2x+3}{x^2+3x-10}\mathrm{d}x.$

3. $\int\frac{x+1}{x^2-2x+5}\mathrm{d}x.$

4. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}.$

5. $\int\frac{3}{x^3+1}\mathrm{d}x.$

6. $\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\mathrm{d}x.$

7. $\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$

8. $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}\mathrm{d}x.$

9. $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+x)}.$

10. $\int\frac{1}{x^4-1}\mathrm{d}x.$

11. $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+x+1)}.$

12. $\int\frac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x.$

13. $\int\frac{-x^2-2}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x.$

14. $\int\frac{\mathrm{d}x}{3+\sin^2x}.$

15. $\int\frac{\mathrm{d}x}{3+\cos x}.$

16. $\int\frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}.$

17. $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}.$

18. $\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin x-\cos x+5}.$

19. $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+1}}.$

20. $\int\frac{(\sqrt{x})^3-1}{\sqrt{x}+1}\mathrm{d}x.$

21. $\int\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\mathrm{d}x.$

22. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}.$

23. $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{\mathrm{d}x}{x}.$

24. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}.$

解 1. $\int\frac{x^3}{x+3}\mathrm{d}x=\int\left(x^2-3x+9-\frac{27}{x+3}\right)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+9x-27\ln|x+3|+C.$$

2. $\int\frac{2x+3}{x^2+3x-10}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(x^2+3x-10)}{x^2+3x-10}=\ln|x^2+3x-10|+C.$

3. $\int \frac{x+1}{x^2-2x+5}\mathrm{d}x = \int \frac{x-1}{(x-1)^2+4}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+5) + \arctan\frac{x-1}{2} + C.$

4. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{x^2+1}$

$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$

5. $\int \frac{3}{1+x^3}\mathrm{d}x = \int \frac{3}{(1+x)(x^2-x+1)}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{1+x} + \frac{2-x}{x^2-x+1}\right)\mathrm{d}x$

$= \ln|1+x| - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}\mathrm{d}x + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}\mathrm{d}x$

$= \ln|1+x| - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \sqrt{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\mathrm{d}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$

$= \ln|1+x| - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$

6. $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\mathrm{d}x = \int \left[\frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$

$= \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + \frac{1}{x+1} + C.$

7. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \int \left[-\frac{1}{2(x+1)} + \frac{2}{x+2} - \frac{3}{2(x+3)}\right]\mathrm{d}x$

$= -\frac{1}{2}\ln|x+1| + 2\ln|x+2| - \frac{3}{2}\ln|x+3| + C.$

8. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}\mathrm{d}x = \int \left(x^2+x+1+\frac{8}{x} - \frac{3}{x-1} - \frac{4}{x+1}\right)\mathrm{d}x$

$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 8\ln|x| - 3\ln|x-1| - 4\ln|x+1| + C.$

9. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+x)} = \int \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1+x}{2(x^2+1)}\right]\mathrm{d}x$

$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{x^2+1}$

$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + C.$

10. $\int \frac{1}{x^4-1}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\arctan x + C.$$

11. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+x+1)} = \int \left(\frac{-x}{x^2+1} + \frac{x+1}{x^2+x+1}\right)\mathrm{d}x$

$$= -\frac{\ln(x^2+1)}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+x+1)}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\ln(x^2+1)}{2} + \frac{\ln(x^2+x+1)}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

12. $\int \frac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x + \int \frac{2x\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$

$$= \arctan x - \frac{1}{x^2+1} + C.$$

13. $\int \frac{-x^2-2}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x = \int\left[-\frac{1}{x^2+x+1} + \frac{x-1}{(x^2+x+1)^2}\right]\mathrm{d}x$

$$= -\int \frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^2} - \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x,$$

令 $u=x+\frac{1}{2}$,并记 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$,则

$$\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(u^2+a^2)^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{u}{u^2+a^2} + \int \frac{1}{u^2+a^2}\mathrm{d}u\right]$$

$$= \frac{u}{2a^2(u^2+a^2)} + \frac{1}{2a^2}\int \frac{1}{u^2+a^2}\mathrm{d}u,$$

由此得

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x + \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1}{u^2+a^2}\mathrm{d}u + \frac{3}{2}\left[\frac{u}{2a^2(u^2+a^2)} + \frac{1}{2a^2}\int \frac{1}{u^2+a^2}\mathrm{d}u\right]$$

$$= \frac{3u}{4a^2(u^2+a^2)} + \left(\frac{3}{4a^2}+1\right)\int \frac{1}{u^2+a^2}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{3u}{4a^2(u^2+a^2)} + \frac{1}{a}\left(\frac{3}{4a^2}+1\right)\arctan\frac{u}{a} + C_1$$

$$=\frac{2x+1}{2(x^2+x+1)}+\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C_1,$$

因此有

$$\int\frac{-x^2-2}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2(x^2+x+1)}-\frac{2x+1}{2(x^2+x+1)}-\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=-\frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

14. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{3+\sin^2x}=-\int\frac{\mathrm{d}(\cot x)}{3\csc^2x+1}\overset{u=\cot x}{=\!=\!=\!=}-\int\frac{\mathrm{d}u}{3u^2+4}$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{\sqrt{3}u}{2}+C$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{\sqrt{3}\cot x}{2}+C.$$

15. 令 $u=\tan\dfrac{x}{2}$,则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{3+\cos x}=\int\frac{1}{3+\dfrac{1-u^2}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u=\int\frac{1}{2+u^2}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan\dfrac{x}{2}}{\sqrt{2}}+C.$$

16. 令 $u=\tan\dfrac{x}{2}$,则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}=\int\frac{1}{2+\dfrac{2u}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u=\int\frac{1}{u^2+u+1}\mathrm{d}u$$

$$=\int\frac{1}{\left(u+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\mathrm{d}u=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan\dfrac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C.$$

17. 令 $u=\tan\dfrac{x}{2}$,则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}=\int\frac{1}{1+\dfrac{2u}{1+u^2}+\dfrac{1-u^2}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}u}{1+u} = \ln|1+u| + C = \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

18. 令 $u = \tan\frac{x}{2}$,则

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x - \cos x + 5} = \int \frac{1}{\frac{4u}{1+u^2} - \frac{1-u^2}{1+u^2} + 5} \cdot \frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

$$= \int \frac{1}{3u^2 + 2u + 2}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(u+\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}\mathrm{d}\left(u+\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3u+1}{\sqrt{5}} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} + C.$$

19. 令 $u = \sqrt[3]{x+1}$,即 $x = u^3 - 1$,则

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+1}} = \int \frac{3u^2}{1+u}\mathrm{d}u = \int\left(3u - 3 + \frac{3}{1+u}\right)\mathrm{d}u$$

$$= \frac{3}{2}u^2 - 3u + 3\ln|1+u| + C$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2} - 3\sqrt[3]{x+1} + 3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+1}\right| + C.$$

20. $$\int \frac{(\sqrt{x})^3 - 1}{\sqrt{x}+1}\mathrm{d}x = \int\left(x - \sqrt{x} + 1 - \frac{2}{\sqrt{x}+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + x - \int\frac{4t}{t+1}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + x - 4\int\left(1 - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + x - 4\sqrt{x} + 4\ln(\sqrt{x}+1) + C.$$

21. 令 $u = \sqrt{x+1}$,即 $x = u^2 - 1$,则

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\mathrm{d}x = \int\frac{u-1}{u+1}\cdot 2u\mathrm{d}u = 2\int\left(u - 2 + \frac{2}{u+1}\right)\mathrm{d}u$$

$$= u^2 - 4u + 4\ln|u+1| + C$$

$$= x - 4\sqrt{x+1} + 4\ln(\sqrt{x+1}+1) + C_1\ (C_1 = C+1).$$

22. 令 $u=\sqrt[4]{x}$,即 $x=u^4$,则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}=\int\frac{1}{u^2+u}\cdot 4u^3\mathrm{d}u=4\int\left(u-1+\frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u$$
$$=2u^2-4u+4\ln|u+1|+C$$
$$=2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(\sqrt[4]{x}+1)+C.$$

23. 解法一

令 $u=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$,即 $x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$,则

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int u\cdot\frac{1+u^2}{1-u^2}\cdot\frac{-4u}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u=\int\frac{-4u^2}{(1-u^2)(1+u^2)}\mathrm{d}u$$
$$=\int\left(\frac{2}{1+u^2}-\frac{1}{1-u}-\frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u$$
$$=2\arctan u+\ln|1-u|-\ln|1+u|+C$$
$$=2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+C.$$

解法二

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int\frac{1-x}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\xlongequal{x=\sin u}\int\frac{1-\sin u}{\sin u}\mathrm{d}u$$
$$=\int\csc u\mathrm{d}u-\int\mathrm{d}u=\ln|\csc u-\cot u|-u+C$$
$$=\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{|x|}-\arcsin x+C.$$

24. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}=\int\frac{1}{x^2-1}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\mathrm{d}x$,

令 $u=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$,即$x=\frac{u^3+1}{u^3-1}$,得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}=\int\frac{u}{\left(\frac{u^3+1}{u^3-1}\right)^2-1}\cdot\frac{-6u^2}{(u^3-1)^2}\mathrm{d}u=-\frac{3}{2}\int\mathrm{d}u$$
$$=-\frac{3}{2}u+C=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C.$$

习题 4－5 积分表的使用

利用积分表计算下列不定积分：

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}}$.

2. $\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx$.

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x+x^2}}$.

4. $\int \sqrt{2x^2+9}dx$.

5. $\int \sqrt{3x^2-2}dx$.

6. $\int e^{2x}\cos x dx$.

7. $\int x\arcsin\frac{x}{2}dx$.

8. $\int \frac{dx}{(x^2+9)^2}$.

9. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

10. $\int e^{-2x}\sin 3x dx$.

11. $\int \sin 3x\sin 5x dx$.

12. $\int \ln^3 x dx$.

13. $\int \frac{1}{x^2(1-x)}dx$.

14. $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$.

15. $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$.

16. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$.

17. $\int \frac{x}{(2+3x)^2}dx$.

18. $\int \cos^6 x dx$.

19. $\int x^2\sqrt{x^2-2}dx$.

20. $\int \frac{1}{2+5\cos x}dx$.

21. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-1}}$.

22. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$.

23. $\int \frac{x+5}{x^2-2x-1}dx$.

24. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$.

25. $\int \frac{x^4}{25+4x^2}dx$.

解　注意:下列各题中最后括号内所标的是所用积分公式在教材上册附录Ⅳ积分表中的编号.

1. $$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{\sqrt{(2x)^2-3^2}} = \frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{(2x)^2-3^2}\right|+C$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2-9}\right|+C.\ (45)$$

2. $$\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+2^2}d(x+1) = \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}+C.\ (19)$$

3. $$\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x+x^2}} = \int \frac{d(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2+1}} = \ln[x-2+\sqrt{(x-2)^2+1}]+C$$
$$= \ln(x-2+\sqrt{5-4x+x^2})+C.\ (31)$$

4. $\int\sqrt{2x^2+9}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\sqrt{(\sqrt{2}x)^2+3^2}\mathrm{d}(\sqrt{2}x)$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{\sqrt{2}x}{2}\sqrt{(\sqrt{2}x)^2+3^2}+\frac{3^2}{2}\ln\left[\sqrt{2}x+\sqrt{(\sqrt{2}x)^2+3^2}\right]\right\}+C$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{2x^2+9}+\frac{9\sqrt{2}}{4}\ln(\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+9})+C.\ (39)$$

5. $\int\sqrt{3x^2-2}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\sqrt{(\sqrt{3}x)^2-(\sqrt{2})^2}\mathrm{d}(\sqrt{3}x)$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{3}x}{2}\sqrt{(\sqrt{3}x)^2-(\sqrt{2})^2}-\right.$$

$$\left.\frac{(\sqrt{2})^2}{2}\ln\left|\sqrt{3}x+\sqrt{(\sqrt{3}x)^2-(\sqrt{2})^2}\right|\right]+C$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{3x^2-2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-2}\right|+C.\ (53)$$

6. $\int e^{2x}\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{2^2+1^2}e^{2x}(\sin x+2\cos x)+C$

$$=\frac{1}{5}e^{2x}(\sin x+2\cos x)+C.\ (129)$$

7. $\int x\arcsin\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2^2}{4}\right)\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{4}\sqrt{2^2-x^2}+C$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-1\right)\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{4}\sqrt{4-x^2}+C.\ (114)$$

8. $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+9)^2}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+3^2)^2}$

$$=\frac{x}{2(2-1)3^2(x^2+3^2)}+\frac{2\times2-3}{2(2-1)3^2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+3^2}$$

$$=\frac{x}{18(x^2+9)}+\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}+C$$

$$=\frac{x}{18(x^2+9)}+\frac{1}{54}\arctan\frac{x}{3}+C.\ (20,19)$$

9. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^3x}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x}{\sin^2x}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$

$$=-\frac{\cos x}{2\sin^2x}+\frac{1}{2}\ln|\csc x-\cot x|+C.\ (97,88)$$

10. $\int e^{-2x}\sin 3x\mathrm{d}x=\frac{1}{(-2)^2+3^2}e^{-2x}(-2\sin 3x-3\cos 3x)+C$

$$=-\frac{e^{-2x}}{13}(2\sin 3x+3\cos 3x)+C.\ (128)$$

11. $$\int \sin 3x\sin 5x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2(3+5)}\sin(3+5)x+\frac{1}{2(3-5)}\sin(3-5)x+C$$
$$=-\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{4}\sin 2x+C.\ (101)$$

12. $$\int \ln^3 x\mathrm{d}x = x(\ln x)^3-3\int \ln^2 x\mathrm{d}x$$
$$=x(\ln x)^3-3\left[x(\ln x)^2-2\int \ln x\mathrm{d}x\right]$$
$$=x(\ln x)^3-3x(\ln x)^2+6\int \ln x\mathrm{d}x$$
$$=x(\ln x)^3-3x(\ln x)^2+6(x\ln x-x)+C$$
$$=x\ln^3 x-3x\ln^2 x+6x\ln x-6x+C.\ (135,132)$$

13. $$\int \frac{1}{x^2(1-x)}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}-\ln\left|\frac{1-x}{x}\right|+C.\ (6)$$

14. $$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x=2\sqrt{x-1}-\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$$
$$=2\sqrt{x-1}-2\arctan\sqrt{x-1}+C.\ (17,15)$$

15. $$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\arctan x+C.\ (20,19)$$

16. $$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x=\arccos\frac{1}{|x|}+C.\ (51)$$

17. $$\int \frac{x}{(2+3x)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{9}\left(\ln|2+3x|+\frac{2}{2+3x}\right)+C.\ (7)$$

18. $$\int \cos^6 x\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\cos^5 x\sin x+\frac{5}{6}\int \cos^4 x\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{6}\cos^5 x\sin x+\frac{5}{6}\left(\frac{1}{4}\cos^3 x\sin x+\frac{3}{4}\int \cos^2 x\mathrm{d}x\right)$$
$$=\frac{1}{6}\cos^5 x\sin x+\frac{5}{24}\cos^3 x\sin x+\frac{5}{8}\int \cos^2 x\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{6}\cos^5 x\sin x+\frac{5}{24}\cos^3 x\sin x+\frac{5}{8}\left(\frac{1}{2}\cos x\sin x+\frac{1}{2}\int \mathrm{d}x\right)$$
$$=\frac{1}{6}\cos^5 x\sin x+\frac{5}{24}\cos^3 x\sin x+\frac{5}{16}\cos x\sin x+\frac{5}{16}x+C.\ (96)$$

19. $$\int x^2\sqrt{x^2-2}\mathrm{d}x=\frac{x}{8}(2x^2-2)\sqrt{x^2-2}-\frac{4}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right|+C$$
$$=\frac{x}{4}(x^2-1)\sqrt{x^2-2}-\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right|+C.\ (56)$$

20. $\int \frac{1}{2+5\cos x}\mathrm{d}x = \frac{1}{7}\sqrt{\frac{7}{3}}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{7}{3}}}{\tan\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{7}{3}}}\right| + C$

$$= \frac{1}{\sqrt{21}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}\tan\frac{x}{2}+\sqrt{7}}{\sqrt{3}\tan\frac{x}{2}-\sqrt{7}}\right| + C. \ (106)$$

21. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{2x-1}} = -\frac{\sqrt{2x-1}}{-x} - \frac{2}{-2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2x-1}}$

$$= \frac{\sqrt{2x-1}}{x} + 2\arctan\sqrt{2x-1} + C. \ (16,15)$$

22. 解法一

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x = \int\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x - \int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C. \ (59,61)$$

解法二

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x = (x+1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - 2\arcsin\sqrt{\frac{1-x}{2}} + C$$

$$= \sqrt{1-x^2} - 2\arcsin\sqrt{\frac{1-x}{2}} + C. \ (80)$$

23. $\int\frac{x+5}{x^2-2x-1}\mathrm{d}x = \int\frac{x}{x^2-2x-1}\mathrm{d}x + 5\int\frac{1}{x^2-2x-1}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-1| - \frac{-2}{2}\int\frac{1}{x^2-2x-1}\mathrm{d}x + 5\int\frac{1}{x^2-2x-1}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-1| + 6\cdot\frac{1}{\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}\cdot$$

$$\ln\left|\frac{2x-2-\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2x-2+\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-1| + \frac{3}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-(\sqrt{2}+1)}{x+(\sqrt{2}-1)}\right| + C. \ (30,29)$$

24. $\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-x^2}} = -\sqrt{1+x-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C. \ (78)$

25. $\int\frac{x^4}{25+4x^2}\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{25}{16} + \frac{625}{16}\cdot\frac{1}{25+4x^2}\right)\mathrm{d}x$

$$= \frac{x^3}{12} - \frac{25}{16}x + \frac{625}{32}\int\frac{1}{5^2+(2x)^2}\mathrm{d}(2x)$$

$$= \frac{x^3}{12} - \frac{25}{16}x + \frac{625}{32} \cdot \frac{1}{5}\arctan\frac{2x}{5} + C$$
$$= \frac{x^3}{12} - \frac{25}{16}x + \frac{125}{32}\arctan\frac{2x}{5} + C. \quad (19)$$

总习题四

1. 填空：

(1) $\int x^3 e^x dx =$ ________；

(2) $\int \frac{x+5}{x^2-6x+13}dx =$ ________.

解 (1) $\int x^3 e^x dx = \int x^3 d(e^x) = x^3e^x - 3\int x^2 d(e^x)$

$$= x^3e^x - 3\left[x^2e^x - \int 2x d(e^x)\right] = x^3e^x - 3x^2e^x + 6\left(xe^x - \int e^x dx\right)$$
$$= x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + C,$$

因此,应填 $x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + C$.

(2) $\int \frac{x+5}{x^2-6x+13}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2-6x+13)'}{x^2-6x+13}dx + \int \frac{8}{x^2-6x+13}dx$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13) + \int \frac{8}{(x-3)^2+4}dx$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13) + 4\arctan\frac{x-3}{2} + C,$$

因此,应填 $\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13) + 4\arctan\frac{x-3}{2} + C$.

2. 以下两题中给出了四个结论,从中选出一个正确的结论：

(1) 已知 $f'(x) = \frac{1}{x(1+2\ln x)}$,且 $f(1) = 1$,则 $f(x)$ 等于(　　).

(A) $\ln(1+2\ln x)+1$　　(B) $\frac{1}{2}\ln(1+2\ln x)+1$

(C) $\frac{1}{2}\ln(1+2\ln x)+\frac{1}{2}$　　(D) $2\ln(1+2\ln x)+1$

(2) 在下列等式中,正确的结果是(　　).

(A) $\int f'(x)dx = f(x)$　　(B) $\int df(x) = f(x)$

(C) $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$　　(D) $d\int f(x)dx = f(x)$

解 (1) 由微积分基本定理,有

$$f(x)-f(1)=\int_1^x f'(t)\,\mathrm{d}t=\int_1^x \frac{1}{t(1+2\ln t)}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_1^x \frac{1}{1+2\ln t}\mathrm{d}(1+2\ln t)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln(1+2\ln t)\right]_1^x=\frac{1}{2}\ln(1+2\ln x),$$

根据条件$f(1)=1$，得$f(x)=\frac{1}{2}\ln(1+2\ln x)+1$. 故选(B).

(2) 根据微分运算与积分运算的关系，可知

$$\int \mathrm{d}f(x)=\int f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)+C,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\,\mathrm{d}x=f(x),$$

$$\mathrm{d}\int f(x)\,\mathrm{d}x=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x=f(x)\,\mathrm{d}x,$$

故选(C).

3. 已知$\frac{\sin x}{x}$是$f(x)$的一个原函数，求$\int x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x$.

解　根据条件，有$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\sin x}{x}+C$，即$f(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，因此

$$\int x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x=x^3 f(x)-\int 3x^2 f(x)\,\mathrm{d}x=x(x\cos x-\sin x)-3\int x^2\,\mathrm{d}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$=x^2\cos x-x\sin x-3\left(x^2\cdot\frac{\sin x}{x}-\int\frac{\sin x}{x}\cdot 2x\,\mathrm{d}x\right)$$

$$=x^2\cos x-4x\sin x-6\cos x+C.$$

4. 求下列不定积分(其中a,b为常数)：

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$;　　(2) $\int \frac{x}{(1-x)^3}\mathrm{d}x$;

(3) $\int \frac{x^2}{a^6-x^6}\mathrm{d}x\ (a>0)$;　　(4) $\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x}\mathrm{d}x$;

(5) $\int \frac{\ln\ln x}{x}\mathrm{d}x$;　　(6) $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x$;

(7) $\int \tan^4 x\,\mathrm{d}x$;　　(8) $\int \sin x\sin 2x\sin 3x\,\mathrm{d}x$;

(9) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^6+4)}$;　　(10) $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\mathrm{d}x\ (a>0)$;

(11) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}$;　　(12) $\int x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$;

(13) $\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$;　　(14) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}$;

(15) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$;　　(16) $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{5/2}}$;

(17) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$;　　(18) $\int \sqrt{x}\sin\sqrt{x}dx$;

(19) $\int \ln(1+x^2)dx$;　　(20) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx$;

(21) $\int \arctan\sqrt{x}dx$;　　(22) $\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}dx$;

(23) $\int \frac{x^3}{(1+x^8)^2}dx$;　　(24) $\int \frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}dx$;

(25) $\int \frac{dx}{16-x^4}$;　　(26) $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$;

(27) $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$;　　(28) $\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx$;

(29) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx$;　　(30) $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}$;

(31) $\int \frac{e^{3x}+e^x}{e^{4x}-e^{2x}+1}dx$;　　(32) $\int \frac{xe^x}{(e^x+1)^2}dx$;

(33) $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx$;　　(34) $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$;

(35) $\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x dx$;　　(36) $\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

(37) $\int \frac{\cot x}{1+\sin x}dx$;　　(38) $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos x}$;

(39) $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$;　　(40) $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$.

解　(1) $\int \frac{dx}{e^x-e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x}-1} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{e^x+1}\right)d(e^x)$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{|e^x-1|}{e^x+1}+C.$$

(2) $\int \frac{x}{(1-x)^3}dx \xlongequal{u=1-x} \int\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{u^3}\right)du = -\frac{1}{u}+\frac{1}{2u^2}+C$

$$= -\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2(1-x)^2}+C.$$

(3) $\int \frac{x^2}{a^6-x^6}dx = \int \frac{d(x^3)}{3(a^6-x^6)} \xlongequal{u=x^3} \int \frac{du}{3(a^6-u^2)}$

$$= \frac{1}{6a^3}\int\left(\frac{1}{a^3+u}+\frac{1}{a^3-u}\right)du$$

$$= \frac{1}{6a^3}\ln\left|\frac{a^3+u}{a^3-u}\right| + C = \frac{1}{6a^3}\ln\left|\frac{a^3+x^3}{a^3-x^3}\right| + C.$$

(4) $\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(x+\sin x)}{x+\sin x} = \ln|x+\sin x| + C.$

(5) $\int \frac{\ln\ln x}{x}\mathrm{d}x = \int \ln\ln x\,\mathrm{d}(\ln x) = \ln x\ln\ln x - \int \ln x\cdot\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$

$$= \ln x(\ln\ln x - 1) + C.$$

(6) $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(\sin^2 x)}{1+\sin^4 x} = \frac{\arctan(\sin^2 x)}{2} + C.$

(7) $\int \tan^4 x\mathrm{d}x = \int \tan^2 x(\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x$

$$= \int \tan^2 x\mathrm{d}(\tan x) - \int(\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C.$$

(8) $\int \sin x\sin 2x\sin 3x\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x)\sin 3x\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int \cos x\sin 3x\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos 3x\sin 3x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}\int(\sin 2x + \sin 4x)\mathrm{d}x - \frac{1}{12}\sin^2 3x$$

$$= -\frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{12}\sin^2 3x + C.$$

(9) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^6+4)} \xlongequal{x=\frac{1}{u}} \int \frac{-u^5\mathrm{d}u}{1+4u^6} = -\frac{1}{24}\int \frac{\mathrm{d}(1+4u^6)}{1+4u^6}$

$$= -\frac{1}{24}\ln(1+4u^6) + C = -\frac{1}{24}\ln\frac{x^6+4}{x^6} + C$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{24}\ln(x^6+4) + C.$$

(10) 解法一

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\mathrm{d}x = \int \frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = a\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= a\arcsin\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C.$$

解法二　令 $u = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$，即 $x = a\frac{u^2-1}{u^2+1}$，则

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\mathrm{d}x = \int u\cdot\frac{4au}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u = \int -2au\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+u^2}\right)$$

$$= -\frac{2au}{1+u^2}+\int\frac{2a}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

$$= -\frac{2au}{1+u^2}+2a\arctan u+C$$

$$= (x-a)\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}+2a\arctan\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}+C$$

$$= -\sqrt{a^2-x^2}+2a\arctan\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}+C.$$

(11) 解法一

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$\xlongequal{x=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sec u}\int\sec u\mathrm{d}u=\ln|\sec u+\tan u|+C$$

$$=\ln\left|2x+1+2\sqrt{x(1+x)}\right|+C.$$

解法二　当 $x>0$ 时,因为$\dfrac{1}{\sqrt{x(1+x)}}=\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$,故令 $u=\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$,即 $x=\dfrac{u^2}{1-u^2}$,则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}=\int\frac{2}{1-u^2}\mathrm{d}u=\int\left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}\right|+C$$

$$=\ln\left|2x+1+2\sqrt{x(1+x)}\right|+C,$$

当 $x<-1$ 时,同样可得$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}=\ln\left|2x+1+2\sqrt{x(1+x)}\right|+C.$

(12) $$\int x\cos^2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int x(1+\cos 2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int x\mathrm{d}(2x+\sin 2x)$$

$$=\frac{x(2x+\sin 2x)}{4}-\frac{1}{4}\int(2x+\sin 2x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2}{4}+\frac{x\sin 2x}{4}+\frac{\cos 2x}{8}+C.$$

(13) 当 $a\neq 0$ 时,

$$\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int\cos bx\mathrm{d}(e^{ax})$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}\int \sin bx\mathrm{d}(e^{ax})$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x.$$

因此有

$$\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx) + C,$$

当 $a=0$ 时，

$$\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{\sin bx}{b} + C, & b \neq 0, \\ x + C, & b = 0. \end{cases}$$

(14) 令 $u=\sqrt{1+e^x}$,即作换元 $x=\ln(u^2-1)$,得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^x}} = \int \frac{2\mathrm{d}u}{u^2-1} = \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C = \ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + C.$$

(15) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}} \xlongequal{x=\frac{1}{u}} -\int \frac{u\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \sqrt{1-u^2} + C = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C,$$

易知当 $x<0$ 和 $x>0$ 时的结果相同.

(16) 设 $x=a\sin u\left(-\dfrac{\pi}{2}<u<\dfrac{\pi}{2}\right)$,则$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos u$,$\mathrm{d}x=a\cos u\mathrm{d}u$,

于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2-x^2)^{5/2}} = \frac{1}{a^4}\int \sec^4 u\mathrm{d}u = \frac{1}{a^4}\int(\tan^2 u + 1)\mathrm{d}(\tan u)$$

$$= \frac{\tan^3 u}{3a^4} + \frac{\tan u}{a^4} + C$$

$$= \frac{1}{3a^4}\left[\frac{x^3}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} + \frac{3x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right] + C.$$

(17) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{1+x^2}} \xlongequal{x=\frac{1}{u}} \int \frac{-u^3\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} = -\int\left(u\sqrt{1+u^2} - \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)\mathrm{d}u$$

$$= -\frac{1}{3}(1+u^2)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{1+u^2} + C$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{x^3} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C,$$

易知当 $x<0$ 和 $x>0$ 时结果相同.

$$(18)\ \int \sqrt{x}\sin\sqrt{x}\,dx \xlongequal{x=u^2} \int 2u^2\sin u\,du = -\int 2u^2 d(\cos u)$$

$$= -2u^2\cos u + \int 4u\cos u\,du$$

$$= -2u^2\cos u + \int 4u\,d(\sin u)$$

$$= -2u^2\cos u + 4u\sin u - \int 4\sin u\,du$$

$$= -2u^2\cos u + 4u\sin u + 4\cos u + C$$

$$= -2x\cos\sqrt{x} + 4\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 4\cos\sqrt{x} + C.$$

$$(19)\ \int \ln(1+x^2)\,dx = x\ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}dx$$

$$= x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x + C.$$

$$(20)\ \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx = \int \tan^2 x\sec x\,dx = \int \sec^3 x\,dx - \int \sec x\,dx$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sec x\tan x + \frac{1}{2}\int \sec x\,dx\right) - \int \sec x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\sec x\tan x - \frac{1}{2}\int \sec x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\sec x\tan x - \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C.$$

$$(21)\ \int \arctan\sqrt{x}\,dx = \int \arctan\sqrt{x}\,d(1+x) = (1+x)\arctan\sqrt{x} - \int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

$$= (1+x)\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + C.$$

$$(22)\ \int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}dx = \int \frac{\sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx = \pm\sqrt{2}\int \csc\frac{x}{2}\,d\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \pm\sqrt{2}\ln\left|\csc\frac{x}{2} - \cot\frac{x}{2}\right| + C,$$

上式当 $\cos\frac{x}{2} > 0$ 时取正,当 $\cos\frac{x}{2} < 0$ 时取负.

当 $\cos\frac{x}{2} > 0$ 时,$\ln\left|\csc\frac{x}{2} - \cot\frac{x}{2}\right| = \ln\dfrac{1-\cos\frac{x}{2}}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$

$$= \ln\left(\left|\csc\frac{x}{2}\right| - \left|\cot\frac{x}{2}\right|\right),$$

当 $\cos\frac{x}{2}<0$ 时,$\ln\left|\csc\frac{x}{2}-\cot\frac{x}{2}\right|=\ln\frac{1-\cos\frac{x}{2}}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$

$$=\ln\left(\left|\csc\frac{x}{2}\right|+\left|\cot\frac{x}{2}\right|\right)=-\ln\left(\left|\csc\frac{x}{2}\right|-\left|\cot\frac{x}{2}\right|\right),$$

因此有

$$\int\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}\mathrm{d}x=\sqrt{2}\ln\left(\left|\csc\frac{x}{2}\right|-\left|\cot\frac{x}{2}\right|\right)+C.$$

(23) $\int\frac{x^3}{(1+x^8)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\frac{1}{(1+x^8)^2}\mathrm{d}(x^4)\xlongequal{u=x^4}\frac{1}{4}\int\frac{1}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u,$

设 $u=\tan t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$,则 $1+u^2=\sec^2 t,\mathrm{d}u=\sec^2 t\mathrm{d}t$,于是

$$\text{原式}=\frac{1}{4}\int\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{2t+\sin 2t}{16}+C$$

$$=\frac{\arctan x^4}{8}+\frac{x^4}{8(1+x^8)}+C.$$

(24) $\int\frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}\mathrm{d}x\xlongequal{u=x^4}\frac{1}{4}\int\frac{u^2}{u^2+3u+2}\mathrm{d}u$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1+\frac{1}{u+1}-\frac{4}{u+2}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{4}u+\frac{1}{4}\ln|1+u|-\ln|2+u|+C$$

$$=\frac{x^4}{4}+\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{2+x^4}+C.$$

(25) $\int\frac{\mathrm{d}x}{16-x^4}=\int\frac{1}{(2-x)(2+x)(4+x^2)}\mathrm{d}x$

$$=\int\left[\frac{1}{32(2-x)}+\frac{1}{32(2+x)}+\frac{1}{8(4+x^2)}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{32}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|+\frac{1}{16}\arctan\frac{x}{2}+C.$$

(26) 解法一

令 $u=\tan\frac{x}{2}$,得

$$\int\frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{4u}{(1+u)^2(1+u^2)}\mathrm{d}u=\int\left[\frac{-2}{(1+u)^2}+\frac{2}{1+u^2}\right]\mathrm{d}u$$

$$=\frac{2}{1+u}+2\arctan u+C=\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}+x+C.$$

解法二

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x(1-\sin x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$= -\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}(\cos x) - \int(\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x$$

$$= \sec x - \tan x + x + C.$$

(27) $\displaystyle\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x + \int \tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x$

$$= \int x\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right) + \int \tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x$$

$$= x\tan\frac{x}{2} + C.$$

(28) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\sin x}\frac{x\cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int x\mathrm{e}^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x - \int \mathrm{e}^{\sin x}\tan x\sec x\mathrm{d}x$

$$= \int x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{\sin x}) - \int \mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}(\sec x)$$

$$= x\mathrm{e}^{\sin x} - \int \mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x - \left(\sec x\mathrm{e}^{\sin x} - \int \mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x\right)$$

$$= (x - \sec x)\mathrm{e}^{\sin x} + C.$$

(29) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\mathrm{d}x \xlongequal{x=u^6} \int \frac{6}{u(u+1)}\mathrm{d}u = 6\int\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u$

$$= 6\ln\left|\frac{u}{1+u}\right| + C = \ln\frac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)^6} + C.$$

(30) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} \xlongequal{x=\ln u} \int \frac{\mathrm{d}u}{u(1+u)^2} = \int\left[\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u} - \frac{1}{(1+u)^2}\right]\mathrm{d}u$

$$= \ln u - \ln(1+u) + \frac{1}{1+u} + C$$

$$= x - \ln(1+\mathrm{e}^x) + \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} + C.$$

(31) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{4x}-\mathrm{e}^{2x}+1}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{2x}-1+\mathrm{e}^{-2x}}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})}{(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})^2+1}$

$$= \arctan(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) + C.$$

(32) $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\mathrm{d}x = -\int x\mathrm{d}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\right) = -\frac{x}{\mathrm{e}^x+1} + \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1}$

$$= -\frac{x}{\mathrm{e}^x+1} + \int \frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{-x}}$$

$$= -\frac{x}{\mathrm{e}^x+1} - \ln(1+\mathrm{e}^{-x}) + C.$$

(33) $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x = x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{2x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

$$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - \int 2\ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}(\sqrt{1+x^2})$$

$$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + 2x + C.$$

(34) $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x \xlongequal{x=\frac{1}{u}} \int \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u = -\int \ln u\mathrm{d}((1+u^2)^{-\frac{1}{2}})$

$$= -\frac{\ln u}{\sqrt{1+u^2}} + \int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}$$

$$= \frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C.$$

(35) 设 $x = \sin u\left(-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}\right)$，则$\sqrt{1-x^2} = \cos u, \mathrm{d}x = \cos u\mathrm{d}u$，于是

$\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x\mathrm{d}x = \int u\cos^2 u\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int u(1+\cos 2u)\mathrm{d}u$

$$= \frac{1}{4}\int u\mathrm{d}(2u+\sin 2u)$$

$$= \frac{u(2u+\sin 2u)}{4} - \frac{1}{4}\int (2u+\sin 2u)\mathrm{d}u$$

$$= \frac{u^2}{4} + \frac{u}{4}\sin 2u - \frac{\sin^2 u}{4} + C$$

$$= \frac{(\arcsin x)^2}{4} + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \frac{x^2}{4} + C.$$

(36) 设 $x = \cos u(0 < u < \pi)$，则$\sqrt{1-x^2} = \sin u, \mathrm{d}x = -\sin u\mathrm{d}u$，于是

$\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -\int u\cos^3 u\mathrm{d}u = -\int u\mathrm{d}\left(\sin u - \frac{1}{3}\sin^3 u\right)$

$$= -u\left(\sin u - \frac{1}{3}\sin^3 u\right) + \int\left(\sin u - \frac{1}{3}\sin^3 u\right)\mathrm{d}u$$

$$= -u\left(\sin u - \frac{1}{3}\sin^3 u\right) - \frac{1}{3}\int (2+\cos^2 u)\mathrm{d}(\cos u)$$

$$= -u\left(\sin u - \frac{1}{3}\sin^3 u\right) - \frac{2}{3}\cos u - \frac{1}{9}\cos^3 u + C$$

$$= -\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}(2+x^2)\arccos x - \frac{1}{9}x(6+x^2) + C.$$

(37) $\int \frac{\cot x}{1+\sin x}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x(1+\sin x)}\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{1+\sin x}\right)\mathrm{d}(\sin x)$

$$= \ln\left|\frac{\sin x}{1+\sin x}\right| + C.$$

(38) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x\cos x} = -\int \cot x\sec^2 x\mathrm{d}(\cot x) \xlongequal{u=\cot x} -\int u\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u$

$$= -\frac{u^2}{2} - \ln|u| + C = -\frac{\cot^2 x}{2} - \ln|\cot x| + C.$$

(39) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{(2+\cos x)(\cos^2 x-1)}$

$$\xlongequal{u=\cos x} \int \frac{\mathrm{d}u}{(2+u)(u^2-1)}$$

$$= \int\left[\frac{1}{6(u-1)} - \frac{1}{2(u+1)} + \frac{1}{3(u+2)}\right]\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{6}\ln|u-1| - \frac{1}{2}\ln|u+1| + \frac{1}{3}\ln|u+2| + C$$

$$= \frac{1}{6}\ln(1-\cos x) - \frac{1}{2}\ln(1+\cos x) + \frac{1}{3}\ln(2+\cos x) + C.$$

(40) 解法一

$$\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)^2 - \frac{1}{2}}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int(\sin x+\cos x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int\frac{1}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}(-\cos x+\sin x) - \frac{1}{2}\int\frac{1}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x,$$

令 $u = \tan\frac{x}{2}$,则 $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$,故有

$$\int\frac{1}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x = \int\frac{2}{2u+1-u^2}\mathrm{d}u = -\int\frac{2}{(u-1)^2-(\sqrt{2})^2}\mathrm{d}u$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{u-1-\sqrt{2}}\mathrm{d}u + \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{u-1+\sqrt{2}}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u-1+\sqrt{2}}{u-1-\sqrt{2}}\right| + C',$$

因此有

$$\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\sin x-\cos x) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{\tan\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}\right| + C.$$

解法二

$$\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}x \xlongequal{u=x+\frac{\pi}{4}} \int \frac{2\sin^2 u-1}{2\sqrt{2}\sin u}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \sin u\mathrm{d}u - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \csc u\mathrm{d}u$$

$$= -\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\csc\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

第五章
定积分

习题 5－1　定积分的概念与性质

*1. 利用定积分定义计算由抛物线 $y = x^2 + 1$，两直线 $x = a$、$x = b(b > a)$ 及 x 轴所围成的图形的面积.

解　由于函数 $f(x) = x^2 + 1$ 在区间$[a,b]$上连续，因此可积，为计算方便，不妨把$[a,b]$分成 n 等份，则分点为 $x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}(i = 0,1,2,\cdots,n)$，每个小区间长度为 $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$，取 ξ_i 为小区间的右端点 x_i，则

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\\ =&\sum_{i=1}^{n}\left[\left(a+\frac{i(b-a)}{n}\right)^2+1\right]\frac{b-a}{n}\\ =&\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(a^2+1)+2\frac{a(b-a)^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{(b-a)^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2\\ =&(b-a)(a^2+1)+a(b-a)^2\frac{(n+1)}{n}+(b-a)^3\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时，上式极限为

$$(b-a)(a^2+1)+a(b-a)^2+\frac{1}{3}(b-a)^3=\frac{b^3-a^3}{3}+b-a,$$

即为所求图形的面积.

*2. 利用定积分定义计算下列积分：

(1) $\int_a^b x\mathrm{d}x(a < b)$；　　(2) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

解　由于被积函数在积分区间上连续，因此把积分区间分成 n 等份，并取 ξ_i 为小区间的右端点，得到

$$\begin{aligned}(1)\ \int_a^b x\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[a+\frac{i(b-a)}{n}\right]\frac{b-a}{n}\\ &=\lim_{n\to\infty}\left[a(b-a)+\frac{(b-a)^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\right]\\ &=a(b-a)+\frac{(b-a)^2}{2}=\frac{b^2-a^2}{2}.\end{aligned}$$

(2) $\int_0^1 e^x dx = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}e^{\frac{i}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(e^{\frac{1}{n}})^{n+1}-1}{n(e^{\frac{1}{n}}-1)}$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(e^{\frac{n+1}{n}}-1)}{\lim\limits_{n\to\infty}n(e^{\frac{1}{n}}-1)} = e-1.$$

3. 利用定积分的几何意义,证明下列等式:

(1) $\int_0^1 2x dx = 1$;　(2) $\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$;

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx = 0$;　(4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$.

证　(1) 根据定积分的几何意义,定积分$\int_0^1 2x dx$表示由直线 $y=2x$、$x=1$ 及 x 轴围成的图形的面积,该图形是三角形,底边长为1,高为2,因此面积为1,即$\int_0^1 2x dx = 1$.

(2) 根据定积分的几何意义,定积分$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$表示的是由曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 以及 x 轴、y 轴围成的在第 Ⅰ 象限内的图形面积,即单位圆的四分之一的图形,因此有$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$.

(3) 由于函数 $y=\sin x$ 在区间 $[0,\pi]$ 上非负,在区间 $[-\pi,0]$ 上非正. 根据定积分的几何意义,定积分$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx$表示曲线 $y=\sin x(x\in[0,\pi])$ 与 x 轴所围成的图形 D_1 的面积减去曲线 $y=\sin x(x\in[-\pi,0])$ 与 x 轴所围成的图形 D_2 的面积,显然图形 D_1 与 D_2 的面积是相等的,因此有$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx = 0$.

(4) 由于函数 $y=\cos x$ 在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上非负. 根据定积分的几何意义,定积分$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$表示曲线 $y=\cos x\left(x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$与 x 轴和 y 轴所围成的图形 D_1 的面积加上曲线 $y=\cos x\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]\right)$与 x 轴和 y 轴所围成的图形 D_2 的面积,而图形 D_1 的面积和图形 D_2 的面积显然相等,因此有$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$.

4. 利用定积分的几何意义,求下列积分:

(1) $\int_0^t x dx (t>0)$;　(2) $\int_{-2}^{4}\left(\frac{x}{2}+3\right)dx$;

(3) $\int_{-1}^{2}|x|dx$;　(4) $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}dx$.

解　(1) 根据定积分的几何意义,$\int_0^t x dx$表示的是由直线 $y=x$,$x=t$ 以及 x 轴所

围成的直角三角形面积，该直角三角形的两条直角边的长均为 t，因此面积为$\frac{t^2}{2}$，故有$\int_0^t x\mathrm{d}x = \frac{t^2}{2}$.

(2) 根据定积分的几何意义，$\int_{-2}^{4}\left(\frac{x}{2}+3\right)\mathrm{d}x$ 表示的是由直线 $y = \frac{x}{2}+3, x=-2, x=4$ 以及 x 轴所围成的梯形的面积，该梯形的两底长分别为$\frac{-2}{2}+3=2$ 和$\frac{4}{2}+3=5$，梯形的高为 $4-(-2)=6$，因此面积为 21. 故有$\int_{-2}^{4}\left(\frac{x}{2}+3\right)\mathrm{d}x = 21$.

(3) 根据定积分的几何意义，$\int_{-1}^{2}|x|\mathrm{d}x$ 表示的是由折线 $y=|x|$ 和直线 $x=-1, x=2$ 以及 x 轴所围成的图形的面积. 该图形由两个等腰直角三角形组成，一个由直线$y=-x, x=-1$ 和 x 轴所围成，其直角边长为 1，面积为$\frac{1}{2}$；另一个由直线 $y=x, x=2$ 和 x 轴所围成，其直角边长为 2，面积为 2. 因此$\int_{-1}^{2}|x|\mathrm{d}x=\frac{5}{2}$.

(4) 根据定积分的几何意义，$\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x$ 表示的是由上半圆周 $y=\sqrt{9-x^2}$ 以及 x 轴所围成的半圆的面积，因此有$\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x=\frac{9}{2}\pi$.

5. 设 $a<b$，问 a、b 取什么值时，积分$\int_a^b(x-x^2)\mathrm{d}x$ 取得最大值？

解 根据定积分几何意义，$\int_a^b(x-x^2)\mathrm{d}x$ 表示的是由 $y=x-x^2, x=a, x=b$，以及 x 轴所围成的图形在 x 轴上方部分的面积减去 x 轴下方部分面积. 因此如果下方部分面积为 0，上方部分面积为最大时，$\int_a^b(x-x^2)\mathrm{d}x$ 的值最大，即当 $a=0, b=1$ 时，积分$\int_a^b(x-x^2)\mathrm{d}x$ 取得最大值.

6. 已知 $\ln 2=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$，试用抛物线法公式(1－6)求出 ln2 的近似值(取 $n=10$，计算时取 4 位小数).

解 计算 y_i 并列表

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.0000	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	1.0000
y_i	1.0000	0.9091	0.8333	0.7692	0.7143	0.6667	0.6250	0.5882	0.5556	0.5263	0.5000

按抛物线法公式(1－6)，求得

$$s=\frac{1}{30}[(y_0+y_{10})+2(y_2+y_4+y_6+y_8)+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)]$$

$\approx 0.6931.$

7. 设$\int_{-1}^{1}3f(x)\mathrm{d}x=18,\int_{-1}^{3}f(x)\mathrm{d}x=4,\int_{-1}^{3}g(x)\mathrm{d}x=3.$求

(1)$\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$；　　(2)$\int_{1}^{3}f(x)\mathrm{d}x$；

(3)$\int_{3}^{-1}g(x)\mathrm{d}x$；　　(4)$\int_{-1}^{3}\frac{1}{5}[4f(x)+3g(x)]\mathrm{d}x.$

解　(1)$\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}3f(x)\mathrm{d}x=6.$

(2)$\int_{1}^{3}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{3}f(x)\mathrm{d}x-\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=-2.$

(3)$\int_{3}^{-1}g(x)\mathrm{d}x=-\int_{-1}^{3}g(x)\mathrm{d}x=-3.$

(4)$\int_{-1}^{3}\frac{1}{5}[4f(x)+3g(x)]\mathrm{d}x=\frac{4}{5}\int_{-1}^{3}f(x)\mathrm{d}x+\frac{3}{5}\int_{-1}^{3}g(x)\mathrm{d}x=5.$

8. 水利工程中要计算拦水闸门所受的水压力.已知闸门上水的压强p与水深h存在函数关系,且有$p=9.8h(\mathrm{kN/m^2})$.若闸门高$H=3\mathrm{m}$,宽$L=2\mathrm{m}$,求水面与闸门顶相齐时闸门所受的水压力P.

解　在区间$[0,3]$上插入$n-1$个分点$0=h_0<h_1<\cdots<h_n=3$,取$\xi_i\in[h_{i-1},h_i]$,并记$\Delta h_i=h_i-h_{i-1}$,得到闸门所受水压力的近似值为$\sum_{i=1}^{n}p(\xi_i)2\Delta h_i$,根据定积分的定义可知闸门所受的水压力为

$$P=\int_0^3 2p(h)\mathrm{d}h=19.6\int_0^3 h\mathrm{d}h,$$

由于被积函数连续,而连续函数是可积的,因此积分值与积分区间的分法和ξ_i的取法无关.为方便计算,对区间$[0,3]$进行n等分,并取ξ_i为小区间的端点$h_i=\frac{3i}{n}$,于是

$$\int_0^3 h\mathrm{d}h=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{9i}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{9(n+1)}{2n}=\frac{9}{2},$$

故

$$P=19.6\int_0^3 h\mathrm{d}h=88.2\ (\mathrm{kN}).$$

9. 证明定积分性质:

(1) $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$($k$是常数)；　(2) $\int_a^b 1\cdot\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}x=b-a.$

证　根据定积分的定义,在区间$[a,b]$中插入$n-1$个点$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$,记$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$,任取$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$,则

(1) $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}kf(\xi_i)\Delta x_i=k\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

(2) $\int_a^b 1 \cdot \mathrm{d}x = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i = \lim\limits_{\lambda \to 0}(b-a) = b-a.$

10. 估计下列各积分的值:

(1) $\int_1^4 (x^2+1)\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(1+\sin^2 x)\mathrm{d}x$;

(3) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x\arctan x\mathrm{d}x$;　　(4) $\int_2^0 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x$.

解 (1) 在区间$[1,4]$上,$2 \leqslant x^2+1 \leqslant 17$,因此有

$$6 = \int_1^4 2\mathrm{d}x \leqslant \int_1^4 (x^2+1)\mathrm{d}x \leqslant \int_1^4 17\mathrm{d}x = 51.$$

(2) 在区间$\left[\frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right]$上,$1 = 1+0 \leqslant 1+\sin^2 x \leqslant 1+1 = 2$,因此有

$$\pi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}\mathrm{d}x \leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(1+\sin^2 x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}2\mathrm{d}x = 2\pi.$$

(3) 在区间$\left[\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}\right]$上,函数$f(x) = x\arctan x$是单调增加的,因此$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \leqslant f(x) \leqslant f(\sqrt{3})$,即$\frac{\pi}{6\sqrt{3}} \leqslant x\arctan x \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{3}}$,故有

$$\frac{\pi}{9} = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\mathrm{d}x \leqslant \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x\arctan x\mathrm{d}x \leqslant \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\pi}{\sqrt{3}}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\pi.$$

(4) 设$f(x) = x^2 - x, x \in [0,2]$,则$f'(x) = 2x-1$,$f(x)$在$[0,2]$上的最大值、最小值必为$f(0)$,$f\left(\frac{1}{2}\right)$,$f(2)$中的最大值和最小值,即最大值和最小值分别为$f(2) = 2$和$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$,因此有

$$2\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}} = \int_0^2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^2 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^2 \mathrm{e}^2\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^2,$$

而$\int_2^0 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x = -\int_0^2 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x$,故$-2\mathrm{e}^2 \leqslant \int_2^0 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x \leqslant -2\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$.

11. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续,证明$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$.

证 记$a = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$,则由定积分性质5,得

$$\int_0^1 [f(x)-a]^2\mathrm{d}x \geqslant 0,$$

即

$$\begin{aligned}\int_0^1 [f(x)-a]^2\mathrm{d}x &= \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x - 2a\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + a^2 \\ &= \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x - \left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \geqslant 0,\end{aligned}$$

由此结论成立.

12. 设 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,证明

(1) 若在 $[a,b]$ 上,$f(x) \geqslant 0$,且 $f(x) \not\equiv 0$,则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$;

(2) 若在 $[a,b]$ 上,$f(x) \geqslant 0$,且 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$,则在 $[a,b]$ 上,$f(x) \equiv 0$;

(3) 若在 $[a,b]$ 上,$f(x) \leqslant g(x)$,且 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$,则在 $[a,b]$ 上,$f(x) \equiv g(x)$.

证　(1) 根据条件必定存在 $x_0 \in [a,b]$,使得 $f(x_0) > 0$. 由函数 $f(x)$ 在 x_0 连续可知,存在 $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$,使得当 $x \in [\alpha,\beta]$ 时 $f(x) \geqslant \dfrac{f(x_0)}{2}$. 因此有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\beta^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

由定积分性质得到:

$$\int_a^\alpha f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0,\quad \int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_\alpha^\beta \frac{f(x_0)}{2}\mathrm{d}x = \frac{\beta-\alpha}{2}f(x_0) > 0,\quad \int_\beta^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0,$$

故得到结论 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$.

(2) 用反证法. 如果 $f(x) \not\equiv 0$,则由(1)得到 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$,与假设条件矛盾,因此结论成立.

(3) 因为 $h(x) = g(x) - f(x) \geqslant 0$,且

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

由(2)可得在 $[a,b]$ 上

$$h(x) \equiv 0,$$

从而结论成立.

13. 根据定积分的性质及第 12 题的结论,说明下列各对积分哪一个的值较大:

(1) $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$ 还是 $\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x$?

(2) $\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x$ 还是 $\int_1^2 x^3\,\mathrm{d}x$?

(3) $\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x$ 还是 $\int_1^2 (\ln x)^2\,\mathrm{d}x$?

(4) $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$ 还是 $\int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$?

(5) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ 还是 $\int_0^1 (1+x)\,\mathrm{d}x$?

解　(1) 在区间[0,1]上 $x^2 \geqslant x^3$，因此$\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$ 比$\int_0^1 x^3 \mathrm{d}x$ 大.

(2) 在区间[1,2]上 $x^2 \leqslant x^3$，因此$\int_1^2 x^3 \mathrm{d}x$ 比$\int_1^2 x^2 \mathrm{d}x$ 大.

(3) 在区间[1,2]上由于 $0 \leqslant \ln x \leqslant 1$，得 $\ln x \geqslant (\ln x)^2$，因此$\int_1^2 \ln x \mathrm{d}x$ 比$\int_1^2 (\ln x)^2 \mathrm{d}x$ 大.

(4) 由教材第三章第一节例 1 可知，当 $x > 0$ 时，$\ln(1+x) < x$，因此 $\int_0^1 x \mathrm{d}x$ 比$\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x$ 大.

(5) 由于当 $x > 0$ 时 $\ln(1+x) < x$，故此时有 $1 + x < \mathrm{e}^x$，因此$\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$ 比$\int_0^1 (1+x)\mathrm{d}x$ 大.

习题 5－2　微积分基本公式

1. 试求函数 $y = \int_0^x \sin t\mathrm{d}t$ 当 $x = 0$ 及 $x = \frac{\pi}{4}$ 时的导数.

解　$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sin x$，因此$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = 0$，$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. 求由参数表达式 $x = \int_0^t \sin u\mathrm{d}u$，$y = \int_0^t \cos u\mathrm{d}u$ 所确定的函数对 x 的导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\cos t}{\sin t} = \cot t$.

3. 求由$\int_0^y \mathrm{e}^t \mathrm{d}t + \int_0^x \cos t\mathrm{d}t = 0$ 所决定的隐函数对 x 的导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　方程两端分别对 x 求导，得 $\mathrm{e}^y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \cos x = 0$，故$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\mathrm{e}^{-y}\cos x$.

4. 当 x 为何值时，函数 $I(x) = \int_0^x t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 有极值？

解　容易知道 $I(x)$ 可导，而 $I'(x) = x\mathrm{e}^{-x^2} = 0$ 只有惟一解 $x = 0$. 当$x < 0$ 时 $I'(x) < 0$，当 $x > 0$ 时 $I'(x) > 0$，故 $x = 0$ 为函数 $I(x)$ 的惟一的极值点(极小值点).

5. 计算下列各导数：

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t$；　　(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{x^3}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$；

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t$.

解　(1) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt = 2x\sqrt{1+x^4}$.

(2) $$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = \frac{d}{dx}\left(\int_0^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} - \int_0^{x^2}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}\right) = \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}.$$

(3) $$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt &= \frac{d}{dx}\left[\int_0^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt - \int_0^{\sin x}\cos(\pi t^2)dt\right]\\ &= -\sin x\cos(\pi\cos^2 x) - \cos x\cos(\pi\sin^2 x)\\ &= -\sin x\cos(\pi - \pi\sin^2 x) - \cos x\cos(\pi\sin^2 x)\\ &= (\sin x - \cos x)\cos(\pi\sin^2 x).\end{aligned}$$

6. 证明 $f(x) = \int_1^x\sqrt{1+t^3}dt$ 在 $[-1,+\infty)$ 上是单调增加函数，并求 $(f^{-1})'(0)$.

证　显然 $f(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 上可导，且当 $x>-1$ 时，$f'(x)=\sqrt{1+x^3}>0$，因此 $f(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 是单调增加函数.

注意到 $f(1)=0$，故 $(f^{-1})'(0)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

7. 设 $f(x)$ 具有三阶连续导数，$y=f(x)$ 的图形如图 5-1 所示. 问下列积分中的哪一个积分值为负？

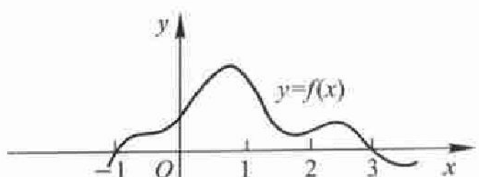


图 5-1

(A) $\int_{-1}^3 f(x)dx$　　(B) $\int_{-1}^3 f'(x)dx$

(C) $\int_{-1}^3 f''(x)dx$　　(D) $\int_{-1}^3 f'''(x)dx$

解　根据 $y=f(x)$ 的图形可知，在区间 $[-1,3]$ 上 $f(x)\geqslant 0$，且 $f(-1)=f(3)=0$，$f'(-1)>0$，$f''(-1)<0$，$f'(3)<0$，$f''(3)>0$. 因此
$$\int_{-1}^3 f(x)dx>0,\quad \int_{-1}^3 f'(x)dx = f(3)-f(-1)=0,$$
$$\int_{-1}^3 f''(x)dx = f'(3)-f'(-1)<0,\ \int_{-1}^3 f'''(x)dx = f''(3)-f''(-1)>0.$$ 故选(C).

8. 计算下列积分：

(1) $\int_0^a(3x^2-x+1)dx$;　　(2) $\int_1^2\left(x^2+\dfrac{1}{x^4}\right)dx$;

(3) $\int_4^9 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x$;　　(4) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$;

(5) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$;　　(6) $\int_0^{\sqrt{3}a} \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$;

(7) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$;　　(8) $\int_{-1}^0 \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\mathrm{d}x$;

(9) $\int_{-e-1}^{-2} \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$;　　(10) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2\theta\mathrm{d}\theta$;

(11) $\int_0^{2\pi} |\sin x|\mathrm{d}x$;

(12) $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$,其中 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\leqslant 1, \\ \frac{1}{2}x^2, & x>1. \end{cases}$

解 (1) $\int_0^a (3x^2-x+1)\mathrm{d}x = \left[x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^a$

$$= a^3-\frac{1}{2}a^2+a = a\left(a^2-\frac{1}{2}a+1\right).$$

(2) $\int_1^2 \left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3x^3}\right]_1^2 = \frac{21}{8}$.

(3) $\int_4^9 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x = \int_4^9 (\sqrt{x}+x)\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{x^2}{2}\right]_4^9 = \frac{271}{6}$.

(4) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = [\arctan x]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$.

(5) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{3}$.

(6) $\int_0^{\sqrt{3}a} \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \left[\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\right]_0^{\sqrt{3}a} = \frac{\pi}{3a}$.

(7) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}} = \left[\arcsin\frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$.

(8) $\int_{-1}^0 \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \left(3x^2+\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$

$$= [x^3+\arctan x]_{-1}^0 = 1+\frac{\pi}{4}.$$

(9) $\int_{-e-1}^{-2} \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = [\ln|1+x|]_{-e-1}^{-2} = -1$.

(10) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2\theta\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2\theta-1)\mathrm{d}\theta = [\tan\theta-\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1-\frac{\pi}{4}$.

(11) $\int_0^{2\pi} |\sin x| \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x) \mathrm{d}x$

$$= [-\cos x]_0^{\pi} + [\cos x]_{\pi}^{2\pi} = 4.$$

(12) $\int_0^2 f(x) \mathrm{d}x = \int_0^1 (x+1) \mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{1}{2} x^2 \mathrm{d}x$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{6}\right]_1^2 = \frac{8}{3}.$$

9. 设 $k \in \mathbf{N}_+$,试证下列各题:

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \mathrm{d}x = 0$;　　(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \mathrm{d}x = 0$;

(3) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \mathrm{d}x = \pi$;　　(4) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \mathrm{d}x = \pi$.

解 (1) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{k} \sin kx\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{k} \cos kx\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$

(3) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2kx) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x = \pi$,其中由(1)得到$\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2kx \mathrm{d}x = 0$.

(4) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2kx) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x = \pi$,其中由(1)得到$\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2kx \mathrm{d}x = 0$.

10. 设 $k, l \in \mathbf{N}_+$,且 $k \neq l$. 证明:

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin lx \mathrm{d}x = 0$;　　(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx \mathrm{d}x = 0$;

(3) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lx \mathrm{d}x = 0$.

解 (1) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin lx \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(k+l)x - \sin(k-l)x] \mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k+l) x \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k-l) x \mathrm{d}x$$

$$= 0,$$

其中由上一题$\int_{-\pi}^{\pi} \sin (k+l) x \mathrm{d}x = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin (k-l) x \mathrm{d}x = 0$.

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k+l)x + \cos(k-l)x] \mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos (k+l) x \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos (k-l) x \mathrm{d}x$$

$$= 0,$$

其中由上一题 $\int_{-\pi}^{\pi}\cos\,(k+l)x\mathrm{d}x = 0$，$\int_{-\pi}^{\pi}\cos\,(k-l)x\mathrm{d}x = 0.$

$$(3)\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin\,kx\sin\,lx\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(k+l)x-\cos(k-l)x]\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\,(k+l)x\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\,(k-l)x\mathrm{d}x$$
$$= 0,$$

其中由上一题 $\int_{-\pi}^{\pi}\cos\,(k+l)x\mathrm{d}x = 0$，$\int_{-\pi}^{\pi}\cos\,(k-l)x\mathrm{d}x = 0.$

11. 求下列极限：

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\cos\,t^2\mathrm{d}t}{x};\qquad (2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x t\mathrm{e}^{2t^2}\,\mathrm{d}t}.$$

解　$(1)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\cos\,t^2\mathrm{d}t}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\,x^2}{1} = 1.$

$$(2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x t\mathrm{e}^{2t^2}\,\mathrm{d}t} = \lim_{x\to 0}\frac{2\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}{x\mathrm{e}^{2x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\mathrm{e}^{x^2}}{1} = 2.$$

12. 设

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x\in[0,1), \\ x, & x\in[1,2]. \end{cases}$$

求 $\Phi(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[0,2]$ 上的表达式，并讨论 $\Phi(x)$ 在 $(0,2)$ 内的连续性.

解　当 $x\in[0,1)$ 时，$\Phi(x) = \int_0^x t^2\,\mathrm{d}t = \dfrac{x^3}{3}$；当 $x\in[1,2]$ 时，$\Phi(x) = \int_0^1 t^2\mathrm{d}t + \int_1^x t\mathrm{d}t = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{6}$，即

$$\Phi(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3}, & x\in[0,1), \\ \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{6}, & x\in[1,2]. \end{cases}$$

由于 $\lim\limits_{x\to 1^-}\Phi(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3}{3} = \dfrac{1}{3}$，$\lim\limits_{x\to 1^+}\Phi(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{6}\right) = \dfrac{1}{3}$，且 $\Phi(1) = \dfrac{1}{3}$，故函数 $\Phi(x)$ 在 $x = 1$ 处连续，而在其他点处显然连续，因此函数 $\Phi(x)$ 在区间 $(0,2)$ 内连续.

注　事实上，由于 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 内连续，故 $\Phi(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $(0,2)$ 内可导，

因此 $\Phi(x)$ 必在 $(0,2)$ 内连续. 我们甚至有以下更强的结论:

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界并可积, 则 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上连续. 按照连续函数定义不难证明这一结论. 作为练习, 请读者自己证明之.

13. 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 0, & x<0 \text{ 或 } x>\pi.\end{cases}$$

求 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式.

解 当 $x<0$ 时, $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0$;

当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时, $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\dfrac{1}{2}\sin t\mathrm{d}t=\dfrac{1-\cos x}{2}$;

当 $x>\pi$ 时, $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^\pi f(t)\mathrm{d}t+\int_\pi^x f(t)\mathrm{d}t$

$$=\int_0^\pi\frac{1}{2}\sin t\mathrm{d}t=1.$$

即

$$\Phi(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1-\cos x}{2}, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$$

14. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导且 $f'(x)\leqslant 0$,

$$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

证明在 (a,b) 内有 $F'(x)\leqslant 0$.

证 $F'(x)=\dfrac{1}{(x-a)^2}\left[(x-a)f(x)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]$

$$=\frac{1}{(x-a)^2}[(x-a)f(x)-(x-a)f(\xi)]\quad(\xi\in(a,x)\subset[a,b])$$

$$=\frac{x-\xi}{x-a}f'(\eta)\quad(\eta\in(\xi,x)\subset(a,b)),$$

由条件可知结论成立.

15. 设 $F(x)=\int_0^x\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$, 求 $F'(0)$.

解
$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{1} = 1.$$

16. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内连续,且 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. 证明函数

$$y = e^{-x}\int_0^x e^t f(t)\,dt$$

满足微分方程 $\frac{dy}{dx} + y = f(x)$,并求 $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x)$.

证
$$\frac{dy}{dx} = -e^{-x}\int_0^x e^t f(t)\,dt + e^{-x} \cdot e^x f(x)$$
$$= -y + f(x),$$

因此 $y(x)$ 满足微分方程 $\frac{dy}{dx} + y = f(x)$.

由条件 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$,从而存在 $X_0 > 0$,当 $x > X_0$ 时,有

$$f(x) > \frac{1}{2}.$$

因此,

$$\begin{aligned}\int_0^x e^t f(t)\,dt &= \int_0^{X_0} e^t f(t)\,dt + \int_{X_0}^x e^t f(t)\,dt \\ &\geqslant \int_0^{X_0} e^t f(t)\,dt + \int_{X_0}^x \frac{1}{2}e^{X_0}\,dt \\ &= \int_0^{X_0} e^t f(t)\,dt + \frac{1}{2}e^{X_0}(x - X_0),\end{aligned}$$

故,当 $x \to +\infty$ 时,$\int_0^x e^t f(t)\,dt \to +\infty$,从而利用洛必达法则,有

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\int_0^x e^t f(t)\,dt}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x f(x)}{e^x} = 1.$$

习题 5-3 定积分的换元法和分部积分法

1. 计算下列定积分:

(1) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)dx$;

(2) $\int_{-2}^{1} \frac{dx}{(11 + 5x)^3}$;

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos^3\varphi\,d\varphi$;

(4) $\int_0^{\pi} (1 - \sin^3\theta)\,d\theta$;

(5) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,du$;

(6) $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2 - x^2}\,dx$;

(7) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{8-2y^2}\mathrm{d}y$;

(8) $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$;

(9) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x(a>0)$;

(10) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}$;

(11) $\int_{-1}^{1}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{5-4x}}$;

(12) $\int_1^4\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$;

(13) $\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}-1}$;

(14) $\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{3a^2-x^2}}(a>0)$;

(15) $\int_0^1 te^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$;

(16) $\int_1^{e^2}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

(17) $\int_{-2}^{0}\frac{(x+2)\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$;

(18) $\int_0^2\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2-2x+2)^2}$;

(19) $\int_{-\pi}^{\pi}x^4\sin x\mathrm{d}x$;

(20) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos^4\theta\mathrm{d}\theta$;

(21) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;

(22) $\int_{-5}^{5}\frac{x^3\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}\mathrm{d}x$;

(23) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos 2x\mathrm{d}x$;

(24) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\mathrm{d}x$;

(25) $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\mathrm{d}x$;

(26) $\int_0^{2\pi}|\sin(x+1)|\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

$$=\left[-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=0.$$

(2) $\int_{-2}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(11+5x)^3}=\int_{-2}^{1}\frac{\mathrm{d}(11+5x)}{5(11+5x)^3}=\left[-\frac{1}{10(11+5x)^2}\right]_{-2}^{1}=\frac{51}{512}.$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^3\varphi\mathrm{d}\varphi=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\mathrm{d}(\cos\varphi)=\left[-\frac{1}{4}\cos^4\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}.$

(4) $\int_0^{\pi}(1-\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta=\pi+\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)\mathrm{d}(\cos\theta)$

$$\xlongequal{u=\cos\theta}\pi+\int_1^{-1}(1-u^2)\mathrm{d}u=\pi-\frac{4}{3}.$$

(5) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2u)\mathrm{d}u$

$$=\frac{1}{2}\left[u+\frac{1}{2}\sin 2u\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

(6) $\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\mathrm{d}x\xlongequal{x=\sqrt{2}\sin u}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2 u\mathrm{d}u=2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$

(7) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{8-2y^2}\mathrm{d}y \xlongequal{y=2\sin u} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}4\sqrt{2}\cos^2 u\mathrm{d}u$

$$= 2\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2u)\mathrm{d}u$$

$$= 2\sqrt{2}\left[u+\frac{1}{2}\sin 2u\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}(\pi+2).$$

(8) $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x \xlongequal{x=\sin u} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}\mathrm{d}u = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\csc^2 u-1)\mathrm{d}u$

$$= [-\cot u-u]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1-\frac{\pi}{4}.$$

(9) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x \xlongequal{x=a\sin u} \int_0^{\frac{\pi}{2}}a^4\sin^2 u\cos^2 u\mathrm{d}u = \frac{a^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2u)^2\mathrm{d}(2u)$

$$\xlongequal{t=2u} \frac{a^4}{8}\int_0^{\pi}\sin^2 t\mathrm{d}t = \frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^4}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16}a^4.$$

(10) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}} \xlongequal{x=\frac{1}{u}} \int_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{-u}{\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u = \left[-\sqrt{1+u^2}\right]_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$$= \sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

(11) 令 $u=\sqrt{5-4x}$，即 $x=\frac{5-u^2}{4}$，得

$$\int_{-1}^{1}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{5-4x}} = \int_3^1\frac{u^2-5}{8}\mathrm{d}u = \left[\frac{u^3}{24}-\frac{5}{8}u\right]_3^1 = \frac{1}{6}.$$

(12) 令 $u=\sqrt{x}$，即 $x=u^2$，得

$$\int_1^4\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} = \int_1^2\frac{2u\mathrm{d}u}{1+u} = [2u-2\ln(1+u)]_1^2 = 2+2\ln\frac{2}{3}.$$

(13) 令 $u=\sqrt{1-x}$，即 $x=1-u^2$，得

$$\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}-1} = \int_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{-2u\mathrm{d}u}{u-1} = -2[u+\ln(1-u)]_{\frac{1}{2}}^{0} = 1-2\ln 2.$$

(14) $\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{3a^2-x^2}} = -\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{\mathrm{d}(3a^2-x^2)}{\sqrt{3a^2-x^2}}$

$$= -\left[\sqrt{3a^2-x^2}\right]_0^{\sqrt{2}a} = (\sqrt{3}-1)a.$$

(15) $\int_0^1 te^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = -\int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}\left(-\frac{t^2}{2}\right) = \left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^1 = 1-e^{-\frac{1}{2}}.$

(16) $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} \xlongequal{x=e^u} \int_0^2 \frac{du}{\sqrt{1+u}} = [2\sqrt{1+u}]_0^2 = 2\sqrt{3}-2.$

(17) $\int_{-2}^{0} \frac{(x+2)dx}{x^2+2x+2} = \int_{-2}^{0} \frac{(x+1)+1}{(x+1)^2+1}dx$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+\arctan(x+1)\right]_{-2}^{0}$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

(18) 令 $x = 1+\tan u$，则 $dx = \sec^2 u du$，因此

$$\int_0^2 \frac{xdx}{(x^2-2x+2)^2} = \int_0^2 \frac{xdx}{[(x-1)^2+1]^2} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\tan u)du}{\sec^2 u}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 u du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2u)du$$

$$= \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}.$$

(19) 由于被积函数为奇函数，因此$\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x dx = 0.$

(20) 由于被积函数为偶函数，因此

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4\theta d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4\theta d\theta = 8\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi.$$

(21) 由于被积函数为偶函数，因此有

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{1}{2}} (\arcsin x)^2 d(\arcsin x)$$

$$= \frac{2}{3}[(\arcsin x)^3]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi^3}{324}.$$

(22) 由于被积函数为奇函数，因此

$$\int_{-5}^{5} \frac{x^3\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}dx = 0.$$

(23) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos 2x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x(1-2\sin^2 x)dx$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-2\sin^2 x)d(\sin x)$$

$$= \left[\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}.$$

或者

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos 3x+\cos x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\sin 3x+\sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}.$$

(24) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\sin x\mathrm{d}x$

$$\xlongequal{u=\cos x}-2\int_1^0\sqrt{u}\mathrm{d}u=\frac{4}{3}.$$

(25) $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sqrt{2}\sin x\mathrm{d}x=\sqrt{2}[-\cos x]_0^{\pi}=2\sqrt{2}.$

(26) $\int_0^{2\pi}|\sin(x+1)|\mathrm{d}x\xlongequal{x=u-1}\int_1^{2\pi+1}|\sin u|\mathrm{d}u,$

由于 $|\sin x|$ 是以 π 为周期的周期函数,因此

$$上式=2\int_0^{\pi}|\sin u|\mathrm{d}u=4.$$

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x.$$

证 令 $x=a+b-u$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(a+b-u)\mathrm{d}u=\int_a^b f(a+b-u)\mathrm{d}u$$

$$=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x.$$

3. 证明:$\int_x^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\quad(x>0).$

证 $\int_x^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\xlongequal{t=\frac{1}{u}}-\int_{\frac{1}{x}}^1\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$

4. 证明:$\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x=\int_0^1 x^n(1-x)^m\mathrm{d}x(m,n\in\mathbf{N}).$

证 令 $x=1-u$,则

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x=\int_1^0-(1-u)^m u^n\mathrm{d}u=\int_0^1 x^n(1-x)^m\mathrm{d}x.$$

5. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,$n\in\mathbf{Z}$,证明

$$\int_{\frac{n}{2}\pi}^{\frac{n+1}{2}\pi}f(|\sin x|)\mathrm{d}x=\int_{\frac{n}{2}\pi}^{\frac{n+1}{2}\pi}f(|\cos x|)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

证 令 $x=u+\frac{n}{2}\pi$,则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$,因此

$$\int_{\frac{n}{2}\pi}^{\frac{n+1}{2}\pi}f(|\sin x|)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\left|\sin\left(u+\frac{n}{2}\pi\right)\right|\right)\mathrm{d}u$$